Loi Normale

Cours construit à partir d'un travail de Jocelyn de Brio

1. Rappels sur la loi Binomiale (1ère) : vidéo 1

1.1. Le principe de la loi binomiale :

On répète …... fois la même expérience, à …...... issues possibles :

- Succès, de probabilité …..... ,
- Échec, de probabilité …...... .

1.2. Exemple :

On joue à un jeu avec de pile ou face, avec une probabilité de succès à chaque tirage égale à 0,3.
de On peut représenter cette situation par un arbre.
si n=3 et p=0,3 , on a cet arbre :

Dans cette situation, soit ….... la variable aléatoire associée au nombre ...... de succès parmi les ….. expériences.
X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n .

1.3. Définition :

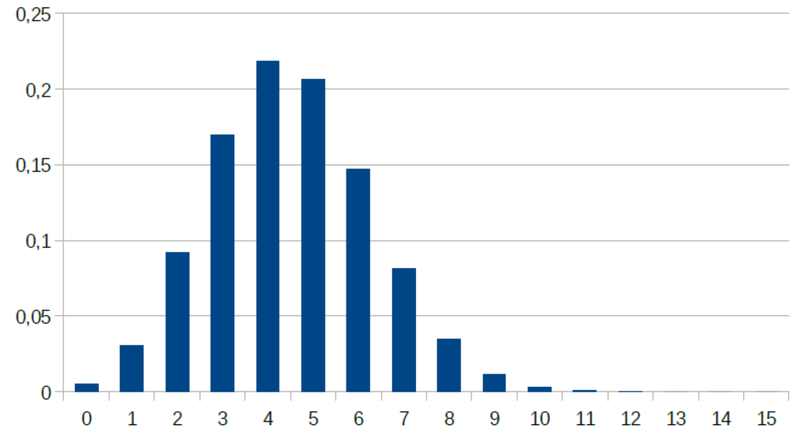
On dit que X suit la ………………………. de paramètres …... et …... .

- Remarques :
  - Les probabilités se calculent avec la calculatrice ou le tableur.
  - $P(X=k)$ est la probabilité d'obtenir exactement ….. succès parmi les …... expériences.
  - $P(X\leqslant k)$ est la probabilité d'obtenir …………….. succès parmi les …... expériences.
  - $P(X>k)$=……………………. .

1.4. Théorème :

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors son espérance est E(X)=........ .

- Application :
  On lance 15 fois de suite une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Pile » sur un lancé est 0,3.
  Soit X , variable aléatoire égale au nombre de « Piles » obtenus ; on a donc X suit donc une loi Binomiale de paramètres n =15 et p = 0,3)
  On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k de la variable aléatoire X (avec $0\leqslant k\leqslant 15$),
  et en ordonnée, les probabilités P(X=k) .



On a donc E(X)=...................... .

1.5. Utilisation de la calculatrice

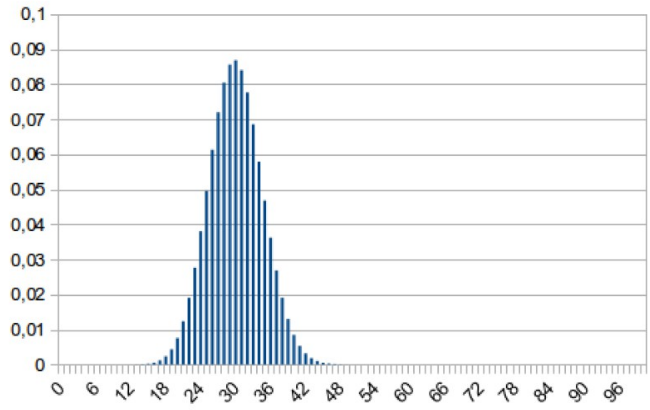
On considère ici que n=20 et p=0,6 .
Calcul de $P(X=7)$: « DIST » (« OPTN », « STAT », « DIST »), « BINM » : binomialPD(7,20,0.6)
On obtient $p(X=7)\approx$....
Calcul de $P(X\leqslant 7)$: « DIST » (« OPTN »,« STAT », « DIST »),« BINM » :binomialCD(7,20,0.6)

On obtient $p(X<7)\approx$....

2. Loi normale

2.1. Approximation de la loi binomiale par une loi normale (vidéo 2)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n=……. et p=….. .
On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k
de la variable aléatoire X (avec $0\leqslant k\leqslant 100$), et en ordonnée, les probabilités ……. .



On remarque quand n devient grand, les diagrammes en bâtons des lois binomiales
ont tous la même allure.

Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale de paramètres n et p, quand n est grand et p pas trop proche de 0 ou 1, peut être approché par une courbe en …………., la courbe …………..
Avec cette courbe, on définit une nouvelle loi de probabilité, la loi ………….**.**

2.2. Propriétés de la loi normale

Deux paramètres caractérisent une loi normale :

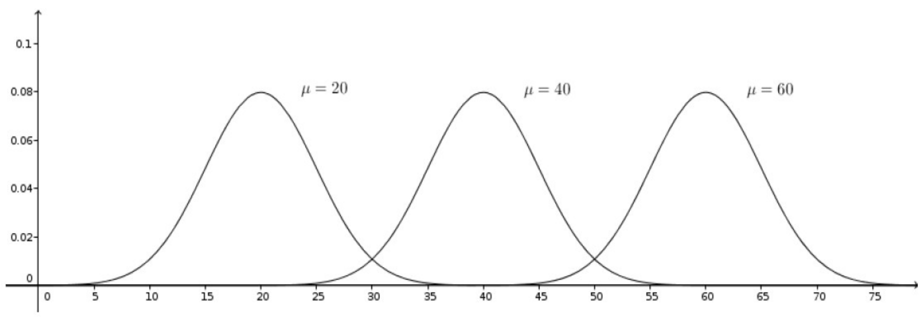
- Son **……………………………..** :
  Elle est égale à celle de la loi binomiale qu'elle approche, c'est-à-dire ……. .
- Son ………………… :
  On dira alors qu'une variable aléatoire *X* suit une loi …………. de paramètres μ et σ .

La courbe d'une loi normale ne dépend donc que de ces deux paramètres. A quoi correspondent -ils ?

- Rôle de l'espérance μ :

Les 3 lois normales suivantes ont le même écart-type :

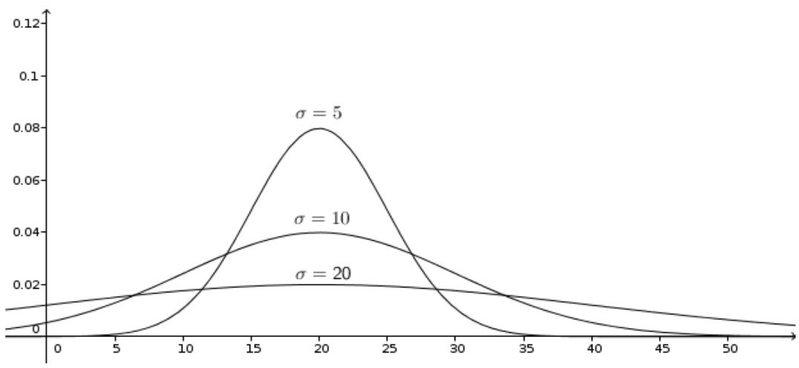
L'espérance (ou la moyenne) est un caractère de **…………..** Elle permet de ………….
la courbe dans un repère.



- Rôle de l'écart-type σ :

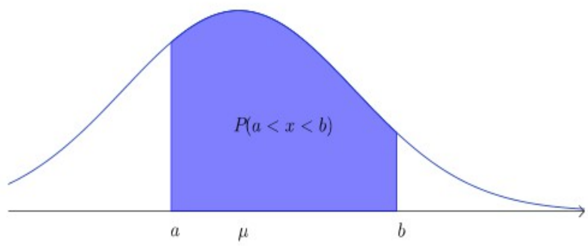
Les 3 lois normales suivantes ont la même espérance :

l'écart-type est un caractère de **………….**. Il permet de mesurer ………….
de la courbe.



- Propriété de la courbe :
  La courbe d'une loi normale est symétrique par rapport à la droite $x=\mu$.

2.3. Calcul de probabilités avec la loi normale (vidéo 3)

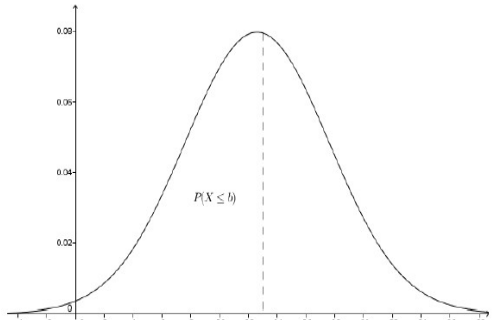


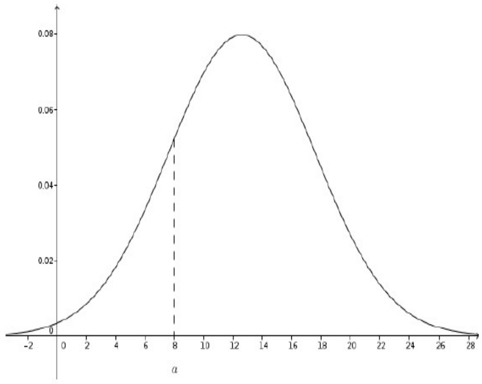
- Propriété :
  Soit *X* suivant une loi normale.

La probabilité $P(\ a\leqslant X\leqslant b)$ que la variable aléatoire *X* appartienne à [a ; b] est égale ……………………… compris entre la courbe de la

loi normale, l'axe des abscisses et les droites d'équation…….……..
Remarque :
On en déduit que pour n'importe quel k , ………….……..

- Application :
$P(X\leqslant b)$ se mesure par l'aire hachurée :

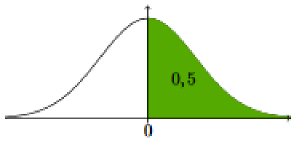




$P(X\geqslant a)$ se mesure par l'aire hachurée :

- Remarque :
Avec la remarque précédente, on en déduit que $(X\leqslant a)$=…….……. , $P(X\geqslant b)$=…….…….

- Propriétés :
  - L'aire sous la courbe d'une loi normale a pour ……..
  - Par symétrie de la courbe par rapport à la droite $x=\mu$, on a $P(X\geqslant\mu)$…….……. et $P(X\leqslant\mu)$=…….……. .
  - $P(X\geqslant a)$=…….……. et $P(a\leqslant X\leqslant b)$=…….……….…. .



2.4. Utilisation de la calculatrice (vidéo 4)

On considère que X suit une loi normale de paramètres $\mu=21$ et $\sigma=7$.

- Calcul de $P(10\leqslant X\leqslant 30)$

Sur la calculatrice CASIO, on tape : « DIST » (« OPTN », « STAT », « DIST ») : normCD(10,30,7,21)
On obtient $P(10\leqslant X\leqslant 30)\approx$…..

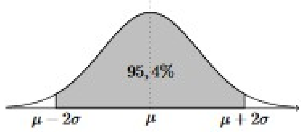
- Calcul de $P(X\leqslant 40)$

Sur la calculatrice CASIO, on tape : « DIST » (« OPTN », « STAT », « DIST ») : normCD(-10^99,40,7,21)
On obtient $P(X\leqslant 40)\approx$…….

- Calcul de $P(X\geqslant 25)$

Sur la calculatrice CASIO, on tape : « DIST » (« OPTN », « STAT », « DIST ») : normCD(25,10^99,7,21)
On obtient $P(X\geqslant 25)\approx$……. .

2.5. Intervalle de fluctuation (vidéo 5)



- Propriété :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ .
Alors, $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx$…………. .
L'intervalle [………... ;………..] est appelé « *intervalle de fluctuation* ……………....».

- Exemple :

Si X suit une loi normale de paramètres $\mu=62$ et $\sigma=9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % est …………………….. .