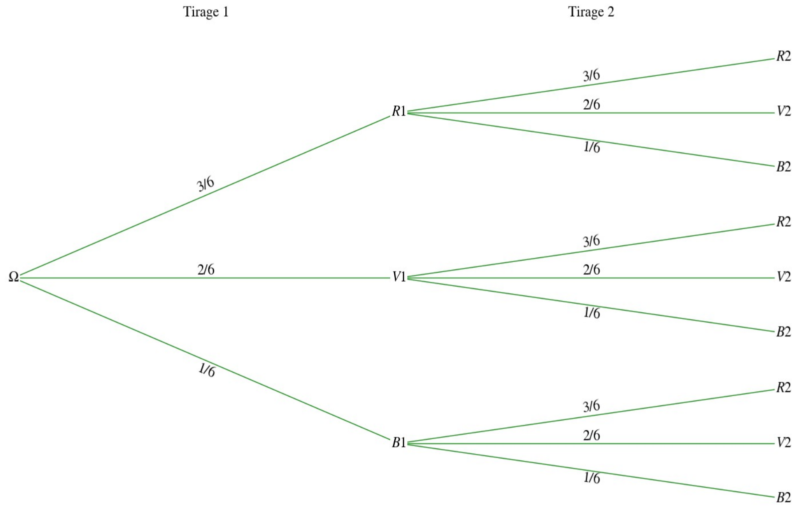
Probabilités conditionnelles

1. Rappel sur les arbres de probabilités :
Quand on réalise plusieurs expériences aléatoires, on peut modéliser la situation par un arbre pondéré.
1.1. Exemple :
Dans une urne, on place 3 boule rouges, deux vertes et une bleue. On réalise deux tirages avec remise de la boule.
Si on appelle R_1 , V_1 et B_1 l'événement obtenir une boule Rouge, Verte ou Bleue au premier tirage, R_2 , V_2 et B_2 au deuxième tirage.
on a $p(R_1)=p(R_2)=$..........

$p(V_1)=$..........

$p(B_1)=$..........

On dit qu'il s'agit d'un arbre pondéré car on a affecté les branches des probabilités correspondantes à l'événement qu'elles portent.



1.2. Règles de calculs dans un arbre pondéré :
<u>Règle de calcul n°1:</u>
Pour calculer la probabilité d'un chemin dans un arbre, on multiplie les pondérations des branches qui le constituent.

<u>Application :</u>
Calculer la probabilité d'obtenir successivement une boule rouge puis une bleue :

<u>Règle de calcul n°2:</u>
Pour calculer la probabilité d'un événement constitué de plusieurs chemins dans un arbre, on ajoute les probabilités de chacun des chemins correspondants.

<u>Application :</u>
Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

2. Rappel sur les événements :
2.1. Intersection d' Événements
<u>Vocabulaire :</u>
On note $A \cap B$ l'événement qui contient à la fois A et B

<u>Application :</u>
Calculer $p(R_1 \cap V_2)$

2.2. Événement Complémentaire
<u>Vocabulaire :</u>
On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A (tout ce qui n'est pas A)
<u>Propriété :</u>
Pour tout événement A , on a : $p(A)+p(\overline{A})=1$
<u>Application :</u>
Calculer $p(\overline{R_1 \cap V_2})$

2.3. Union d' Événements

<u>Vocabulaire :</u>

On note $A \cup B$ l'événement A ou B

<u>Application :</u>

Calculer $p(R_1 \cup V_1)$

2.4. Égalité fondamentale

<u>Propriété :</u>

Pour tout événement A et B , on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

<u>Application :</u>

Calculer $p(R_1 \cup V_2)$

2.5. Événements Incompatibles

<u>Vocabulaire :</u>

On dit que A et B sont des événements incompatibles si $A \cap B = \varnothing$

<u>Propriété :</u>

Si A et B sont des événements incompatibles, on a : $p(A \cap B) = 0$ et donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

<u>Application :</u>

Calculer $p(R_1 \cap V_1)$. Que peut-on en déduire ?

3. Probabilités conditionnelles :

3.1. Notation et Définition :

<u>Vocabulaire :</u>

Sachant que la première boule tirée est verte, quelle est la probabilité d'obtenir une bleue ?

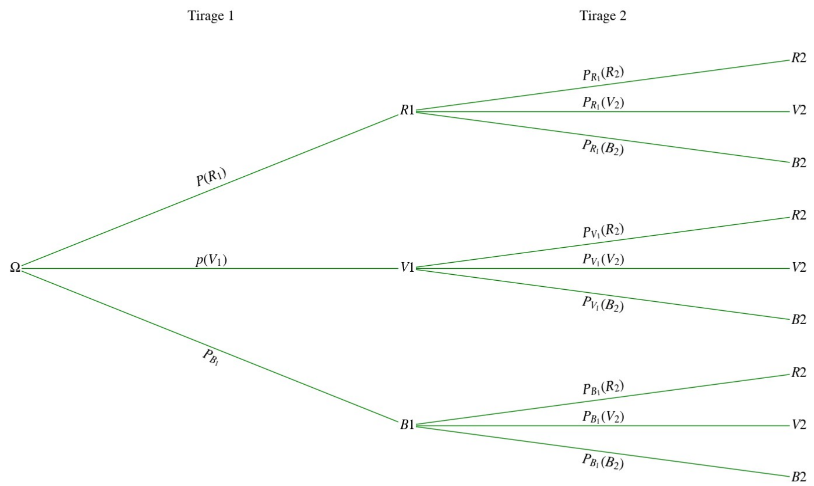
On appelle cela une probabilité conditionnelle, car elle suppose une condition au tirage précédent pour être réalisée.

<u>Notation :</u>

On la probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé : $p_A(B)$

On le lit : $p(B)$ sachant A

L'arbre peut s'écrire ainsi :



<u>Application :</u>

Calculer $p_{B_1}(R_2)$

<u>3.2. Formule des probabilités conditionnelles :</u>

<u>Exemple :</u>

Calculer $p(B_1)$ et $p_{B_1}(R_2)$ puis $p(B_1 \cap R_2)$

Établir la formule des probabilités conditionnelles :

3.2. Événements indépendants :

Définition :
On dit que les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$

Cela signifie que deux événements sont indépendants si l'apport d'information de la réalisation de l'un ne change rien au pronostic probabiliste de réalisation de l'autre.

Propriété :
On dit que les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p\, A \cap B = p(A) \times p(B)$

Exemple :
Calculer $p(B_1)$ et $p(R_2)$
Que peut-on dire de ces deux événements ?

3.3. Incompatible ou Indépendant ? :

Ne pas confondre des événements indépendants et des événements incompatibles :
Exemple 1:
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes :
Soit A l'événement "la carte est noire" et B l'événement "la carte est rouge"

- A et B sont-ils incompatibles ?

$A \cap B =$.............. donc A et B …... On ne peut pas les avoir simultanément.

- A et B sont-ils indépendants ?

$p(A) = p(B) =$.................... et $p(A \cap B) =$.............. donc $p(A \cap B)$....... $p(A) \times p(B)$

A et B ….. Si la carte est noire, elle ne peut pas être rouge.

Exemple 2:
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes :
Soit A l' événement "la carte est noire" et B "la carte est un as" .

- A et B sont-ils incompatibles ?

A et B sont …...................... puisque $A \cap B = \{$....................................$\}$

- A et B sont-ils indépendants ?

Le fait de savoir que la carte est noire ne modifie pas la probabilité que ce soit un as, et réciproquement.
$p(A) =$.......... $p(B) =$.......... $p(A \cap B) =$............. Donc $p(A \cap B)$....... $p(A) \times p(B)$

Et …......................