Correction exercice 5
Plan de travail : Applications des dérivées - Sujets type BAC

Correction de J. F. Lecarpentier – maths-s.fr

Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $I = [1;50]$par $C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200$, les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

Le prix de vente d'un litre de ce produit chimique est de 2300 euros.

1. Montrer que la recette est donnée par la fonction R définie sur I par $R(x) = 23x$

Solution:

un litre est vendu 2300 euros soit $2300 \div 100 = 23$ centaines d'euros

Pour x litres vendus, la recette est donc de $23x$ centaines d'euros

On a donc $R(x) = 23x$

2. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x

Solution:

$B(x) = R(x) - C(x) = 23x - (0,5x^2 + 2x + 200) = -0,5x^2 + 21x - 200$

Le bénéfice est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 21x - 200$

3. Déterminer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal.

Solution:

$B(x) = -0,5x^2 + 21x - 200$

B est dérivable sur $[0;50]$ (fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $I = [1;50]$)

$B'(x) = -0,5 \times 2x + 21 + 0 = -x + 21$

$-x + 21 > 0 \iff -x > -21 \iff x < 21$

On a donc :

x	1		21		50
signe de $B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	$B(1)$	↗	$B(21)$	↘	$B(50)$

Le coût moyen est minimum pour une production de 20 litres.

5. Le coût marginal de production est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire.

Si on note $C_m(x)$ ce coût marginal, on a alors $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

Calculer alors le coût marginal pour une production de 20 litres, c'est à dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 20 litres à 21 litres.

Calculer $C'(20)$ et comparer les deux résultats.

☛ **Solution**:

$C_m(20) = C(21) - C(20) = (0,2 \times 21^2 + 2 \times 21 + 200) - (0,2 \times 20^2 + 2 \times 20 + 200) = 22,5$

Le coût supplémentaire de production pour passer d'une production de 20 litres à 21 litres est de 22,5 centaines d'euros.

$C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200$ et $C'(x) = 0,5 \times 2x + 2 = x + 2$

$C'(20) = 20 + 2 = 22$

On constate que $C_m(20)$ et $C'(20)$ sont relativement proches.

6. En pratique, on assimile le coût marginal de production pour une quantité x à la dérivée du coût total.

On a en effet $C_m(x) = \dfrac{C(x+1) - C(x)}{x+1-x}$ (taux d'accroissement de C entre $x+1$ et x).

Résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$.

☛ **Solution**:

$C_m(x) = C'(x) = x + 2$

$C_m(x) = C_M(x)$

Il faut donc résoudre l'équation :

$x + 2 = \dfrac{0,5x^2 + 2x + 200}{x}$

$\iff x^2 + 2x = 0,5x^2 + 2x + 200$

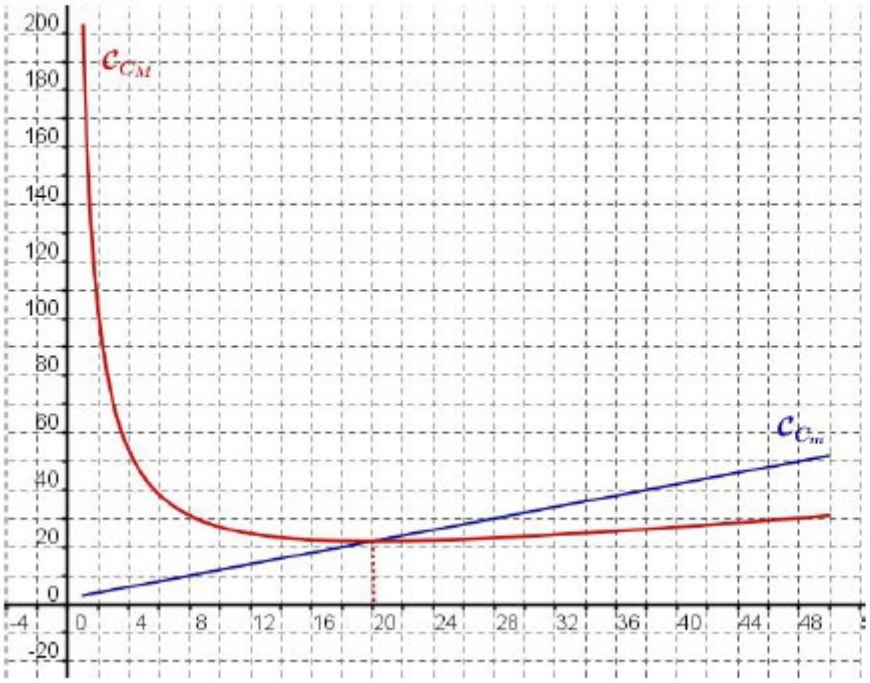
$\iff 0,5x^2 - 200$

$\iff x^2 = 400$

$\iff x = 20$ ou $x = -20$

La valeur pour laquelle le coût moyen est égal au coût marginal correspond à la valeur de x pour laquelle le coût moyen est minimum.

Complément : Graphiquement le coût moyen de production est minimum pour une production correspondant à l'abscisse du point d'intersection des courbes représentatives des fonctions coût marginal et coût moyen.



4. Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction notée C_M et définie par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ avec $x \in [1;50]$

Exprimer le coût moyen de production en fonction de x et en déduire la quantité à produire, arrondie à 0,1 litre près, pour obtenir un coût moyen minimum.

☛ **Solution**:

$C_M(x) = \dfrac{0,5x^2 + 2x + 200}{x}$

$u : x \longmapsto 0,5x^2 + 2x + 200$ est dérivable sur $[1;50]$

et $v : x \longmapsto x$ est dérivable sur $[1;50]$ et $v(x) \neq 0$

donc le quotient de de u par v est dérivable sur I

donc C_M est dérivable sur I

On pose $u(x) = 0,5x^2 + 2x + 200$ et $v(x) = x$ et on a $u'(x) = x + 2$ et $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} C'_M(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(x+2)(x) - (0,5x^2 + 2x + 200)(1)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 0,5x^2 - 2x - 200}{x^2} \\ &= \frac{0,5x^2 - 200}{x^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \in I$, $x^2 > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de son numérateur $0,5x^2 - 200$

Racines de $0,5x^2 - 200$

$0,5x^2 - 200 = 0 \iff x^2 = 400 \iff x = 20$ ou $x = -20$

Signe de $0,5x^2 - 200$

$0,5x^2 - 200$ est du signe de $a = 0,5$ coefficient de x^2 à "l'extérieur" des racines.

On a donc :

x	1		20		50
signe de $C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	$C_M(1)$	↘	$C_M(20)$	↗	$C_M(50)$