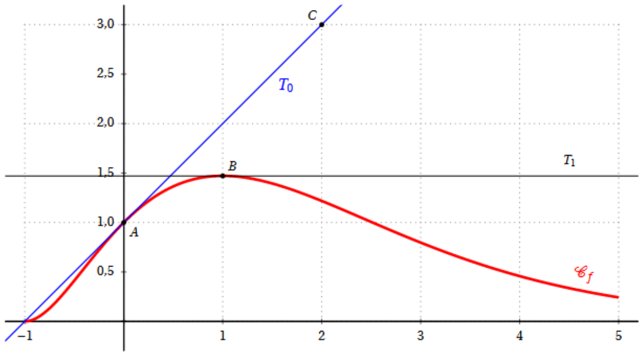
Plan de travail : Applications des dérivées - Sujets type BAC

Exercice 1 : d'après sujet Bac ES - Asie 2016

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$. On note f' la fonction dérivée de f. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0;1)$ et par le point B d'abscisse 1. La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2;3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Dans ce QCM, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des question, une seule des réponses proposées est correcte. Une bonne réponse rapporte 0,75 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

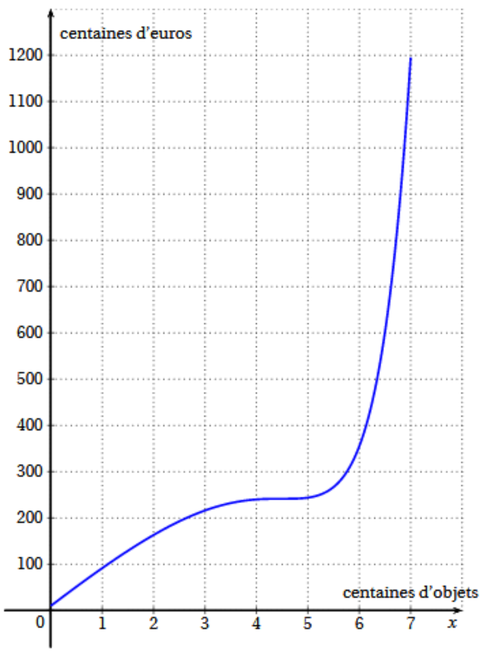
2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

Exercice 2 : d'après sujet BAC ES - Polynésie juin 2014



Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour. On modélise le coût total de production par une fonction C. Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?
2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ? On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

   2. a. Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

   2. b. Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ » ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\,;\,7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets. Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

   2. a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.

   2. b. Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

Exercice 3 : d'après sujet BAC ES - Antilles septembre 2014

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.
Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labellisés « *bio* ».

Partie A

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;\,10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0;\,10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.

   2. a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;\,a]$ inclus dans $[0;\,10]$ sur lequel la fonction C'' est positive.

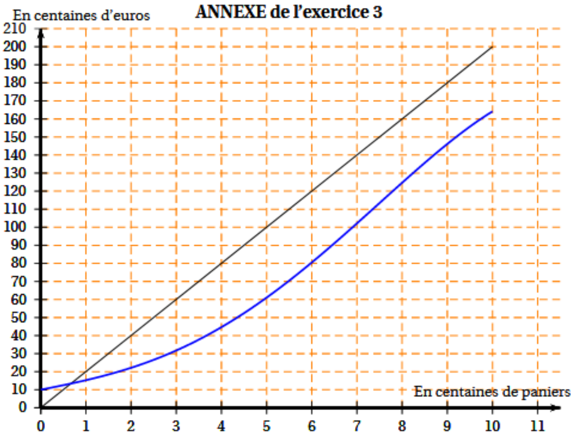
   2. b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Partie B

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes C_R et C_C sur le graphique donné en annexe.
Par lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

1. Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.
2. Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois. Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.
3. Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.

ANNEXE de l'exercice 3



Exercice 4 :

Une entreprise fabrique x tonnes de farine par jour. Sa capacité de production journalière est de 120 tonnes de farine. On estime que le coût de fabrication, noté $\mathrm{C}(x)$, est donné en dollars pour tout réel x de $[0;120]$ par la formule :

$$\mathrm{C}(x)=0{,}01x^3-0{,}1x^2+95x+1500$$

On suppose que chaque tonne de farine est vendue 228 dollars et on note $\mathrm{R}(x)$ la recette de l'entreprise obtenue par la vente de x tonnes de farine. On supposera que chaque tonne fabriquée est vendue.

1 – On appelle $\mathrm{B}(x)$ le bénéfice réalisé par l'entreprise lors de la fabrication et la vente de x tonnes de farine.

a) Exprimer $\mathrm{R}(x)$ en fonction de x.

b) Exprimer $\mathrm{B}(x)$ en fonction de x.

2 – **a)** Pour tout x appartenant à $[0;120]$, calculer $\mathrm{B}'(x)$, puis en déduire les variations de B sur $[0;120]$.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, le bénéfice réalisé est-il maximal ?

3 – **a)** A l'aide de la calculatrice, déterminer graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $\mathrm{B}(x)>0$.

b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles la production est rentable.

Exercice 5 :

Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $I=[1;50]$par $C(x)=0,5x^2+2x+200$, les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

Le prix de vente d'un litre de ce produit chimique est de 2300 euros.

1. Montrer que la recette est donnée par la fonction R définie sur I par $R(x)=23x$

2. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x

3. Déterminer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal.

4. Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction notée C_M et définie par $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ avec $x\in[1;50]$

Exprimer le coût moyen de production en fonction de x et en déduire la quantité à produire, arrondie à 0,1 litre près, pour obtenir un coût moyen minimum.

5. Le coût marginal de production est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire.

Si on note $C_m(x)$ ce coût marginal, on a alors $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$

Calculer alors le coût marginal pour une production de 20 litres, c'est à dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 20 litres à 21 litres.

Calculer $C'(20)$ et comparer les deux résultats.

6. En pratique, on assimile le coût marginal de production pour une quantité x à la dérivée du coût total.

On a en effet $C_m(x)=\dfrac{C(x+1)-C(x)}{x+1-x}$ (taux d'accroissement de C entre $x+1$ et x).

Résoudre l'équation $C_M(x)=C_m(x)$.