Les vecteurs

Intitulé de l'item
2.G10 - Connaître et savoir appliquer la définition d'un vecteur
2.G11 - Connaître et utiliser la translation définie par un vecteur
2.G12 - Interpréter géométriquement l'égalité de deux vecteurs
2.G13 - Construire géométriquement la somme de deux vecteurs
2.G14 - Calculer les coordonnées d'un vecteur
2.G15 - Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs .
2.G16 - Utiliser la notation $k \times \vec{u}$ (calcul de coordonnées, construction géométrique)
2.G17 - Établir la colinéarité de deux vecteurs
2.G18 - Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

2.G10 - Connaître et savoir appliquer la définition d'un vecteur

Définition :

Un vecteur est un objet mathématique qui se défini par

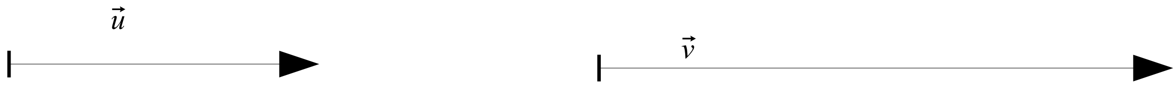
- **par** ....
- **par** ....
- **par** ....

Notation : Pour symboliser un vecteur, on place une flèche sur le symbole.
Exemple : $\vec{u}$ se lit « vecteur u », $\vec{AB}$ se lit « vecteur AB »

Propriété : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même longueur et même sens.

Exemples :

1.



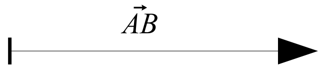
....

2.

....

....

3. 



....

<u>Commentaire</u> : Un vecteur mesure un ....
C'est à dire que $\vec{AB}$ représente le .... qui va du point A au point B

- $\vec{AA}$ représente donc le déplacement qui va du point A au point A !!
  On note alors $\vec{AA}=\vec{0}$ et on l'appelle « .... »
  $\vec{AB}$ représente le déplacement qui va du point A au point B et $\vec{BA}$ représente le déplacement qui va du point B au point A Ces deux déplacements sont .... (même longueur, même direction, mais sens opposé). On a donc : ....

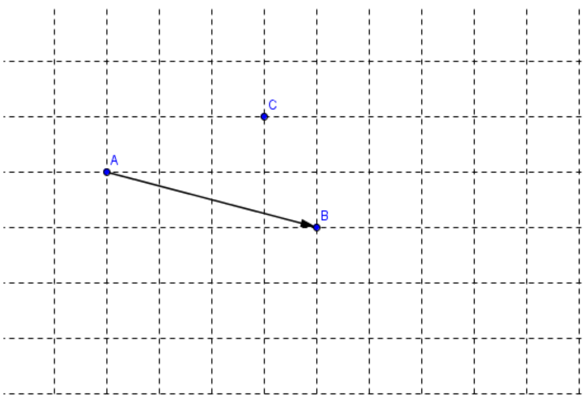
2.G11 - Connaître et utiliser la translation définie par un vecteur

Pour caractériser le déplacement définit par un vecteur, on parle de ....

Définition : Si B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors...............................

<u>Propriété</u> : Si le point D est le symétrique de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$ alors
....

Illustration :



2.G12 - Interpréter géométriquement l'égalité de deux vecteurs

<u>Propriété</u> : $\vec{AI}=\vec{IB} \Leftrightarrow I\ milieu\ de [AB]$

Illustration :

Attention :
La propriété « $I \text{ milieu du segment} [AB] \Leftrightarrow IA=IB$ » est-elle vraie ?

<u>Propriété 2 :</u> $\vec{AB}=\vec{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$ alors ....

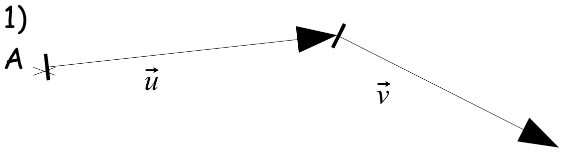
<u>Propriété 3 :</u>

2.G13 - Construire géométriquement la somme de deux vecteurs

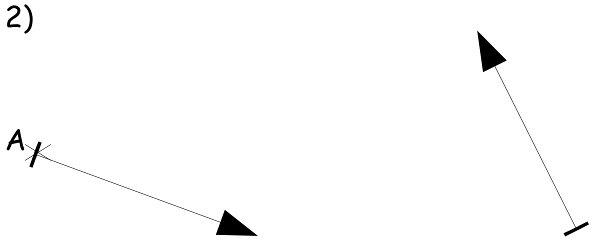
Méthode :
Construire la somme de deux vecteurs, c'est faire à la suite les deux déplacements correspondants.

Exemples :
Construire le point B tel que : $\vec{AB}=\vec{u}+\vec{v}$

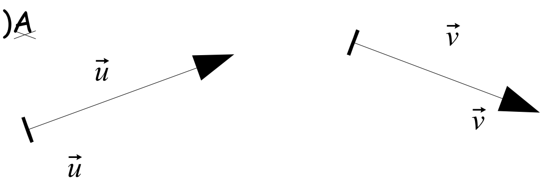
1)



2)



3)



<u>Relation de Chasles :</u>
Placer trois points A, B et M. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$.
Que dire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$?

Propriété :
Pour tous points A, B et M du plan, on a l'égalité dite de Chasles :

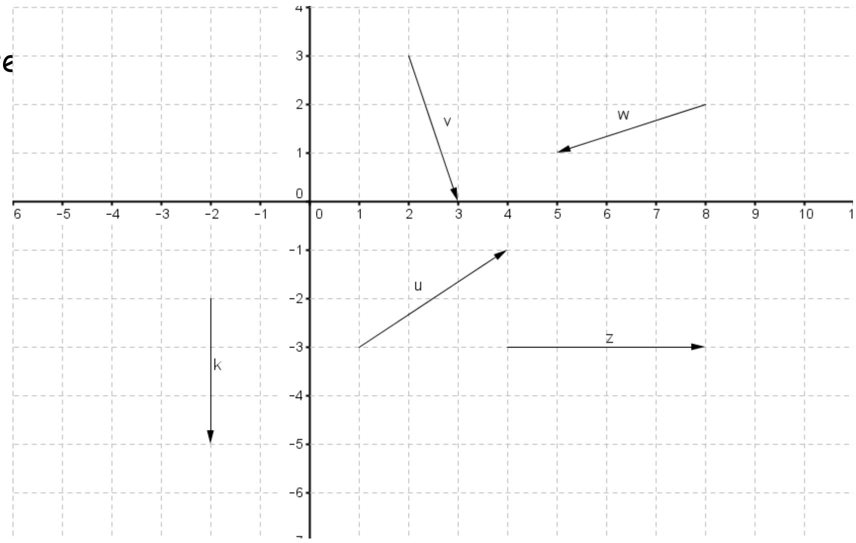
2.G14 - Calculer les coordonnées d'un vecteur

1 Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur

Règle : On détermine les coordonnées d’un vecteur, en donnant son déplacement horizontal et vertical.

Exemple :

Lire les coordonnées des vecteurs représe
ci-contre :



$\vec{u}\begin{pmatrix}.....\\.....\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}.....\\.....\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}.....\\.....\end{pmatrix}$ $\vec{k}\begin{pmatrix}.....\\.....\end{pmatrix}$ $\vec{z}\begin{pmatrix}.....\\.....\end{pmatrix}$

2 Construire un vecteur connaissant ses coordonnées :

Attention,

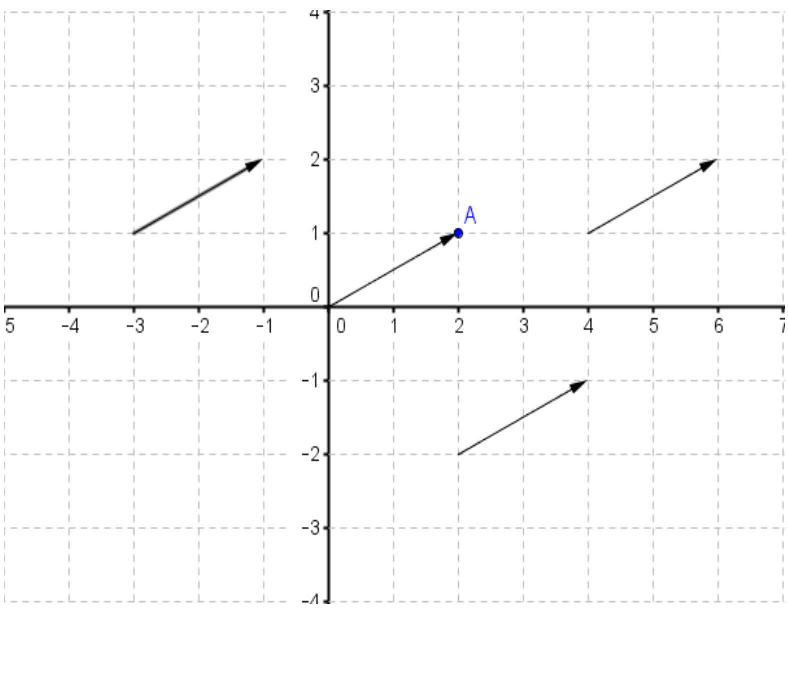
Il ne faut pas confondre les coordonnées d’un point et celles d’un vecteur. Elles ne représentent pas les mêmes choses :

Un vecteur mesure un déplacement. Sur un repère on peut en construire autant de représentants que l'on veut.

Un point est caractérisé par ses coordonnées, qui indiquent sa position par rapport à l'origine du repère. Un point de coordonnées définies est unique.

Illustration :

- Le point de coordonnées A(2 ; 1) est clairement placé dans un repère. Il n’y a pas plusieurs possibilités.
- Le vecteur $\vec{w}$ (2 ; 1) peut être représenté où l’on veut. Un vecteur ne mesure qu’un déplacement, ici de deux unités horizontales vers la droite, et une verticale vers le haut. On peut tracer autant de représentants de ce vecteur dans un repère.



3. Calculer les coordonnées d'un vecteur

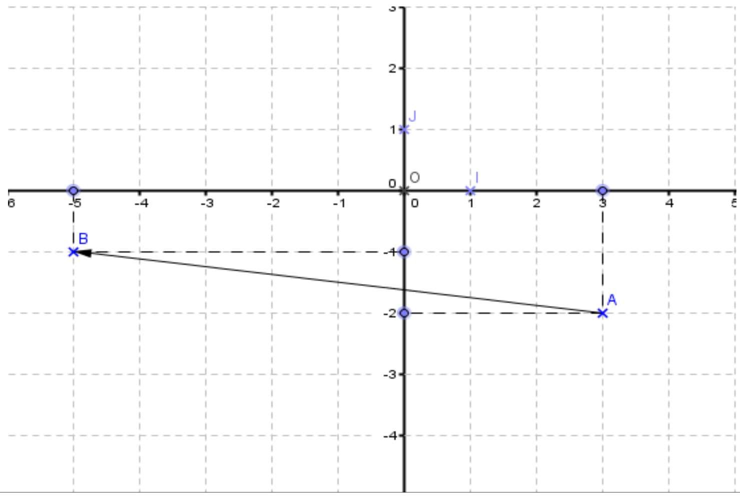
Propriété : Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\vec{AB}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).

Exemple :

Dans un repère (O, I, J) du plan, on donne A(3 ; -2) et B(-5 ; 1) :
Les coordonnées du vecteur sont :

d'où : $\vec{AB}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$



2.G15 - Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs .

Propriété :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Application :

Dans un repère orthonormé (O,I,J), on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un point A(-1 ; -2)

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ = $\vec{u}$ + $\vec{v}$

Déterminer les coordonnées du point B image de A par la translation de vecteur $\vec{w}$

2.G16 - Utiliser la notation $k\times\vec{u}$ (calcul de coordonnées, construction géométrique)

Calcul de coordonnées :

Propriété :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel alors $k\times\vec{u}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

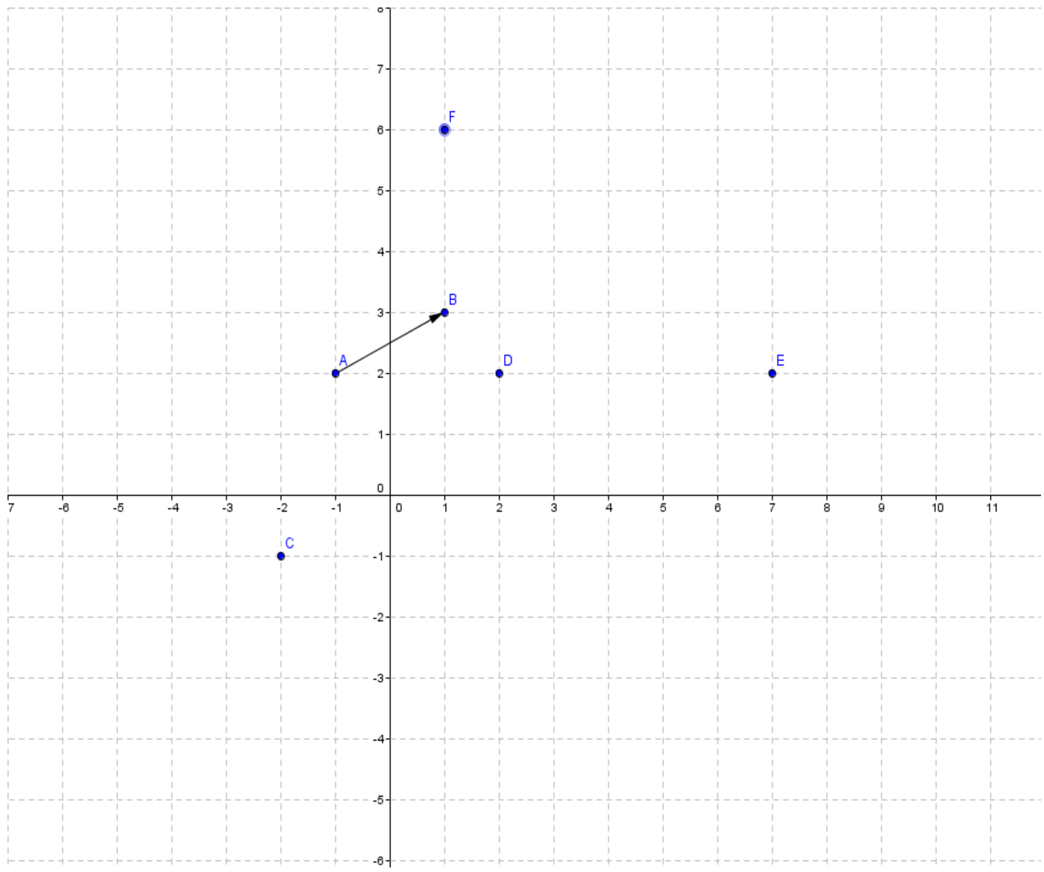
Exemple :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}=2\times\vec{v}$

<u>Construction géométrique :</u>

Représentez dans le repère ci après, les points I, J, K et L tels que :

$\overrightarrow{CI} = 3\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DJ} = -2\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EK} = -4\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{LF} = 3\ \overrightarrow{AB}$



<u>Application :</u>

Soit dans un repère orthonormé (O,I,J), les points suivants : $A(2;3)$, $B(-1;1)$ et $C(3;-2)$

Déterminer les coordonnées du point M vérifiant : $\overrightarrow{AM} = 2\ \overrightarrow{AB} + 3\ \overrightarrow{AC}$

2.G17 - Établir la colinéarité de deux vecteurs

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, s'il existe un nombre k tel que $\vec{u}=$....................

Conséquence :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors si $\vec{u}=k\times\vec{v}$ on a les égalités : $\begin{matrix} x=.... \\ y=..... \end{matrix}$

Exemple 1:

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ils colinéaires ?

Propriété :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires alors leurs coordonnées sont proportionnelles.

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ est un tableau de proportionnalité.

Théorème :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires alors on a l'égalité ....

Exemple 3:

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

Exemple 4:

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

2.G18 - Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

Propriété 1:

Si les points A, B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ....

(La réciproque est évidemment vraie)

Propriété 2:

Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ....

(La réciproque est évidemment vraie)

Application classique :

Soit dans un repère orthonormé (O,I,J), les points suivants : $A(-1\,;3)$, $B(2\,;4)$ $C(-2\,;-1)$ et $D(4;1)$
Démontrer que ABDC est un trapèze