Les suites numériques

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition en français :

On appelle suite arithmétique, une suite dont chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant une constante r, appelée raison.

Exemple :
$u_0 = 2$; $u_1 = 5$; $u_2 = 8$; $u_3 = 11$; ....
sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2

1.2 Définition mathématique :

On appelle suite arithmétique de raison r, toute suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = u_n + 5$

On a alors :
$u_1 = u_0 + 5 = -3 + 5 = 2$
$u_2 = u_1 + 5 = 2 + 5 = 7$
$u_3 = u_2 + 5 = 7 + 5 = 12$; ....

1.3 Propriété :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

On a alors : $u_n = u_0 + n \times r$

Intérêt :
Cette relation permet de calculer un terme de rang n sans calculer les termes précédents. Utile pour calculer directement par exemple u_{12} quand on connait u_0 et r

Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $r = 3$

On a alors : $u_5 = u_0 + 5 \times r = 6 + 5 \times 3 = 21$ $u_9 = u_0 + 9 \times r = 6 + 9 \times 3 = 33$

1.4 Propriété :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante

Exemple :
La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 4$ est croissante car $r > 0$
Inversement, la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = 8$ et de raison $r = -1$ est décroissante car $r < 0$

1.5 Remarque :

Attention de ne pas confondre :
u_{n+1} qui est le terme de rang $n+1$ et $u_n + 1$ qui est le terme de rang $n^{ème}$ ajouté du nombre 1.
Par exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 4$,
on a alors $u_n = u_0 + n \times 4 = 2 + 4n$

$$u_n + 1 = (2 + 4n) + 1$$
$$u_{n+1} = u_0 + (n+1) \times 4 = 2 + 4(n+1)$$

2 Suites géométriques

2.1 Définition en français :

On appelle suite géométrique, une suite dont chaque terme se déduit du précédent en lui multipliant une constante q, appelée raison.

Exemple :
$u_0 = 2$; $u_1 = 6$; $u_2 = 18$; $u_3 = 54$; ....
sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2

2.2 Définition mathématique :

On appelle suite géométrique de raison q, toute suite (u_n) définie par $u_{n+1} = q \times u_n$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$
On a alors : $u_1 = 2u_0 = 6$ $u_2 = 2u_1 = 12$ $u_3 = 2u_2 = 24$

2.3 Propriété :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

On a alors : $u_n = u_0 \times q^n$

Intérêt :
Cette relation permet de calculer un terme de rang n sans calculer les termes précédents. Utile pour calculer directement par exemple u_{12} quand on connait u_0 et q

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}5$

On a alors : $u_5 = u_0 \times q^5 = 2 \times 1{,}5^5 = 15{,}875$ $u_9 = u_0 \times q^9 = 2 \times 1{,}5^9 \approx 76{,}9$

2.4 Propriété :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
On se limite aux situations où $u_0 > 0$. On a alors :

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante

Exemple :
La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 4$ est croissante car $q > 1$
Inversement, la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 0{,}2$ est décroissante car $q < 1$

3 Somme des premiers termes d'une suite

3.1 Méthode :

Avec la calculatrice Casio :
Dans le menu Run : Appluyer sur SHIFT et 4
Appuyer sur « X » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
Choisir $\sum$(lettre grecque qui veut dire Sigma (Somme).

3.2 Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 3$, pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_12$,on tape :
$\sum_{X=0}^{12} (2X - 3)$ et on obtient 117