

# Les bases du calcul algébrique

## 1 Nature d'une expression algébrique

**Objectif :** Savoir déterminer si une expression est une somme ou un produit

Voir Vidéo 1

**Exemples :**

$3 \times x$  est un produit  
 $3 + x$  est une somme  
 $2 + 3 \times x$  est une somme

$(x + 3)(2 - x)$  est un produit  
 $(x + 3) - (2 - x)$  est une somme

## 2 Développer une expression algébrique

### 1 Distributivité simple

Voir Vidéo 2

La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est à dire, pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$ , et  $k$ , on a

$$k(a + b) = ka + kb$$

**Application :**

$$-3(4 - x) = -12 + 3x$$

### 2 Double distributivité

La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est à dire, pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ , on a

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**Application :**

$$\begin{aligned} (3 - x)(2x - 3) &= 6x - 9 - 2x^2 + 3x \\ &= -2x^2 + 9x - 9 \end{aligned}$$

## 3 Développer une identité remarquable

Voir Vidéo 3

**Propriété :**

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  on a

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

**Application :**

$$\begin{aligned} (3x + 4)^2 &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 \\ (6x - 5)^2 &= 36x^2 - 60x + 25 \\ (7x - 9)(7x + 9) &= 49x^2 - 81 \end{aligned}$$

### 3 Factoriser une expression algébrique

#### 1 Avec un facteur commun

**Rappels :** Factoriser, c'est transformer une expression en produit.

Une stratégie consiste à isoler un **facteur commun** à chacun des termes. **Exemple :**  
Factoriser :

$$\begin{aligned} A &= 14x^3 - 8x^2 + 6x \\ &= 7 \times 2 \times x \times x \times x - 4 \times 2 \times x \times x + 3 \times 2 \times x \\ &= 2x(7x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x+3)(4-x) - (x+3)(2x-5) \\ B &= (x+3)((4-x) - (2x-5)) \\ B &= (x+3)(4-x-2x+5) \\ B &= (x+3)(9-3x) \end{aligned}$$

#### 2 Avec les identités remarquables

**Rappels :** On peut utiliser les identités remarquables pour factoriser :

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

**Exemple :** Factoriser :

$$\begin{aligned} B &= 25x^2 - 49 \\ &= (5x)^2 - 7^2 \\ &= (5x-7)(5x+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 1 - (2-x)^2 \\ &= (1 - (2-x))(1 + (2-x)) \\ &= (1 - 2 + x)(1 + 2 - x) \\ &= (-1 + x)(3 - x) \end{aligned}$$

### 4 Résoudre une équation du premier degré

#### 1 Tester une solution

**Rappels :** On appelle **solution** d'une équation une valeur qui rend l'équation vraie.

**Exemple :**

Le nombre  $-2$  est-il solution de l'équation  $7x + 6 = -8x - 10$  ?

On calcule séparément chaque membre en remplaçant  $x$  par  $-2$  :

$$\begin{aligned}7x + 6 &= 7 \times -2 + 6 = -8 \\ -8x - 10 &= -8 \times -2 - 10 = 6\end{aligned}$$

On observe que pour  $x = -2$ , on a  $7x + 6 \neq -8x - 10$   
Le nombre  $-2$  n'est donc pas solution de cette équation.

## 2 Résoudre une équation

**Rappels :** Pour résoudre une équation du premier degré il faut :

1. Développer et réduire, si besoin, chaque membre de l'équation
2. Regrouper les inconnues dans le membre de gauche de l'équation
3. Isoler les inconnues dans le membre de gauche de l'inconnue
4. Diviser par le coefficient devant l'inconnue du membre de gauche, s'il est non nul.

**Exemple :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $5 - 2(2 - x) = -3(3x - 1)$

$$5 - 2(2 - x) = -3(3x - 1)$$

étape 1 : on développe chaque membre

$$5 - 4 + 2x = -9x + 3$$

étape 2 : on regroupe les inconnues à gauche

$$1 + 2x + 9x = 3$$

étape 3 : on isole les inconnues à gauche

$$11x = 2$$

étape 4 : on divise par 11 chaque membre

$$x = \frac{2}{11}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{11} \right\}$$

## 3 Résoudre un problème, modéliser une situation

**Plan général de rédaction :**

Pour mettre en équation un problème, il faut :

1. **Définir une variable**  
Si l'énoncé donne déjà la variable, on passe à l'étape 2 (souvent le cas dans les problèmes qui s'appuient sur une figure).  
Si l'énoncé demande de trouver un ou des nombre(s), il faut bien les définir puisque c'est vous qui les utilisez dans la démonstration.
2. **Mettre en équation le problème**  
C'est l'étape la plus difficile souvent. Il suffit de traduire l'énoncé du français en maths une fois qu'on a défini sa (ou ses) variable(s).
3. **Résoudre l'équation**  
Résolution classique.

**4. Interpréter et conclure**

Il faut analyser les solutions (sont-elles toutes cohérentes avec l'énoncé) et conclure en revenant au problème avec les données de l'énoncé.

Ex : On cherche l'âge de Simone. Si l'équation m'a donné deux solutions -3 et 42, je peux exclure la solution -3 qui ne correspond pas aux données du problème (un âge est positif!). La seule solution du problème serait 42.

On conclut avec une phrase qui répond à la question posée !.

**Exemple :**

Voir Plan de travail

**4 Utiliser les équations produit nul****Propriété :**

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

**Remarque :**

La propriété vue au collège est souvent exprimée ainsi :

"Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul."

La propriété donnée précédemment est plus forte puisqu'elle exprime en même temps la propriété réciproque :

"Si un de ses facteurs est nul alors un produit est nul. "

La formulation **si et seulement si** permet d'exprimer dans une même phrase, une propriété et sa réciproque.

Elle est très utilisée en mathématiques.

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$(3x - 2)(2 - 5x) = 0$$

Rédaction :

$$(3x - 2)(2 - 5x) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$$3x - 2 = 0 \qquad 2 - 5x = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad x = \frac{2}{5}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{2}{5} \right\}$$

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$(4 - 3x)^2 - (4 - 3x)(6x + 7) = 0$$

Rédaction :

Stratégie : Il faut factoriser cette expression pour se ramener à un produit nul.

$$(4 - 3x)^2 - (4 - 3x)(6x + 7) = 0$$

$$(4 - 3x)((4 - 3x) - (6x + 7)) = 0$$

$$(4 - 3x)(4 - 3x - 6x - 7) = 0$$

$$(4 - 3x)(-3 - 9x) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$$4 - 3x = 0 \qquad -3 - 9x = 0$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad x = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$