Plan de travail Loi Binomiale

Épreuve de Bernoulli

Exercice 1 :

Dire si les expériences aléatoires suivantes suivent une épreuve de Bernoulli ?

- On lance une pièce truquée . La probabilité d'avoir face est 0,57.

L'expérience ne possède que deux issues, Face est considéré comme un Succès et Face comme un Échec. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}57$

- Dans une urne contenant 3 boules vertes, 2 rouges et une noire , on tire une boule au hasard et on note sa couleur ?

L'expérience possède trois issues, R,V,N. Ce n'est donc pas une épreuve de Bernoulli

- Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte et on note sa couleur (Noire ou rouge).

L'expérience ne possède que deux issues, R est considéré comme un Succès et N comme un Échec (ou l'inverse peu importe). C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0{,}5$

- Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte et on note sa couleur (Cœur;Trèfle ; Carreau ou Pic).

L'expérience possède quatre issues, C,T,K,P. Ce n'est donc pas une épreuve de Bernoulli

2. Loi de Bernoulli

Exercice 2 :

On extrait une carte d'un jeu de 32 cartes pour s'intéresser à l'obtention d'un as.
S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ?
Si oui, quel est son paramètre ?

L'expérience ne possède que deux issues, « Avoir un As » est considéré comme un Succès et « ne pas obtenir unn as » comme un Échec. C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{4}{32}=0{,}125$

Exercice 3 :

On lance un dé à 6 faces. On appelle X la variable aléatoire qui prend 1 si un cinq ou un six sort.
Calculer $E(X)$.

L'expérience ne possède que deux issues, « Avoir un 5 ou un 6 » est considéré comme un Succès et « obtenir 1-2-3-4 » comme un Échec. C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Si on connaît le cours sur la loi de Bernoulli, on sait que $E(X)=p=\frac{1}{3}$

Sinon, on applique la définition de l'espérance d'une variable aléatoire :

$X=x_i$	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Exercice 4 :
On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
1) On définit la variable aléatoire X égale à la somme des deux résultats.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
X peut prendre toutes les valeurs dans $\{2;3;4;5;6;7;8;\}$
b) En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de X .

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Loi de Probabilité de X

$X=x_i$	2	3	4	5	6	7	8
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

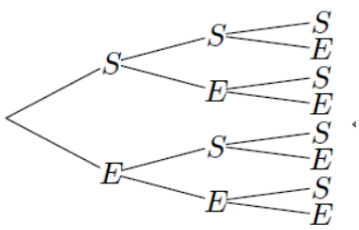
2) On décide de jouer au jeu suivant : si le nombre obtenu est un multiple de 3 , le joueur gagne, sinon, il perd. En utilisant la variable aléatoire X , déterminer la probabilité que le joueur gagne.

Pour $X\in\{2;4;5;7;8\}$ le joueur perd, pour $(X=3)$ et $(X=6)$ le joueur gagne.
La probabilité de succès est donc $p=p(X=3)+p(X=6)=\frac{5}{16}$
Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 5/16

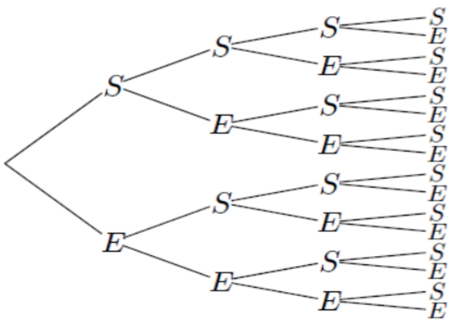
3. Schéma de Bernoulli

Exercice 5 :
Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :

Compléter les tableaux ci-dessous à partir des arbres :



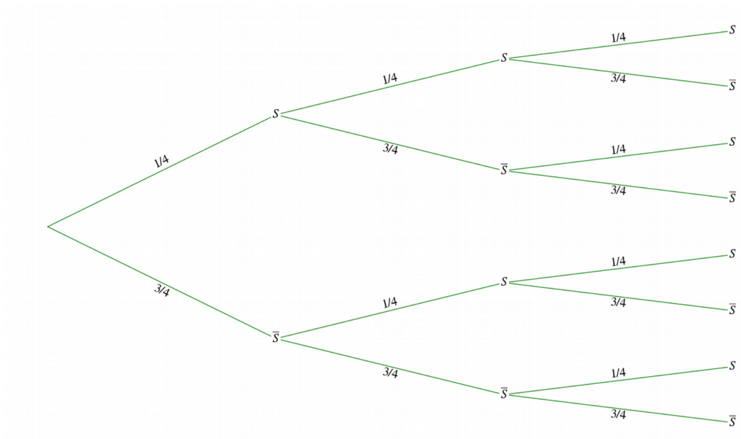
Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues	1	3	3	1



Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues	1	4	6	4	1

Exercice 6 :

Un QCM (questionnaire à choix multiples) comporte trois questions indépendantes et, pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à ce QCM.
On nomme X la variable aléatoire comptant le nombre de réponses exactes obtenues par cet élève.
A partir d'un arbre pondéré, donner la loi de probabilité de X puis son espérance mathématique.



$$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$
$$P(X=1)=3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$
$$P(X=2)=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$$
$$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

Qui permet d'obtenir la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire X

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

X **Suit bien une loi Binomiale (de Bernoulli) puisque les épreuves sont indépendantes et identiques, et que chaque épreuve n'a que deux issues. Les paramètres sont** $n=3$ **(nombre d'épreuves) et** $p=\frac{1}{4}$ **(probabilité de succès)**

Si on connaît le cours sur la la loi binomiale (répétition de n **épreuves de Bernoulli), on sait que**
$$E(X)=n\times p=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
Sinon, on applique la définition de l'espérance d'une variable aléatoire :

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$

Cet élève peut espérer avoir en moyenne 0,75/3 en répondant au hasard.

Exercice 7 :

Au lycée, un quart des élèves aiment le rap. On interroge au hasard 6 élèves du lycée de façon indépendante.
1) Décrire l'épreuve de Bernoulli de cet énoncé.
2) Soit X la variable aléatoire comptant de nombre d'élèves interrogés qui aiment le rap.
a) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
b) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
On donnera en particulier ses paramètres.
3) Quelle est la probabilité qu'aucun élève n'aime le rap ?
4) Quelle la probabilité qu'exactement deux élèves aiment le rap ?
5) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un élève aime le rap ?

Exercice 8 :

Au lycée, 40 % des élèves adooorent la série DESPERATE HOUSEWIVES.
Je choisis au HASARD, six élèves de façon indépendante.
Soit X la variable aléatoire comptant les élèves adooorant cette série.
1) Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2) X suit une loi de probabilité. Laquelle ? Donner ses paramètres.
3) Quelle est la probabilité qu'aucun élève n'adooore cette série ?
4) Quelle est la probabilité qu'exactement deux élèves adooorent cette série ?
5) Quelle est la probabilité qu'au moins un élève adooore cette série ?

4. Coefficient binomiaux :

Exercice 9 :

Un fou dessine un arbre de probabilité représentant une épreuve de Bernoulli répétée 20 fois.
1) Combien y a-t-il de branches en fin d'arbres ?
2) Parmi ces branches, combien correspondent exactement à 10succès.
3) Donner les deux coefficients binomiaux égaux à 20.

Exercice 10 :

Calculer à la main : $\binom{5}{5}$; $\binom{8}{1}$; $\binom{6}{0}$; $\binom{4}{2}$

Exercice 11:

Calculer à calculatrice : $\binom{5}{3}$; $\binom{12}{5}$

Exercice 12 :

Vérifier à l'aide de la calculatrice que $\binom{20}{4}+\binom{20}{5}=\binom{21}{5}$

5. Loi Binomiale :

Exercice 13 :

On répète 8 fois dans des conditions d'indépendance une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est $p=0,3$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès à l'issue de l'expérience.
Calculer $p(X=0)$; $p(X=5)$; $p(X=8)$ et $p(X\geq 8)$

Exercice 14 :

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0,63$.
1. Déterminer les probabilités suivantes arrondies à 10^{-3} près $p(X=0)$; $p(X=1)$ *et* $p(X=5)$
2. Donner la probabilité de l'événement { $X\geqslant 2$ }.

Exercice 15 :

On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n=8$ et $p=0,37$
Déterminer la probabilité suivante : $p(1\leq X\leq 8)$

6. Représentation graphique :

Exercice 16 :

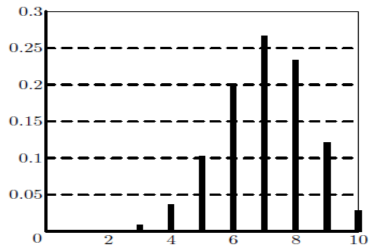
On jette un dé parfaitement équilibré sept fois. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de 6.
Compléter le tableau suivant avec votre calculatrice, en arrondissant à 10^{-2}

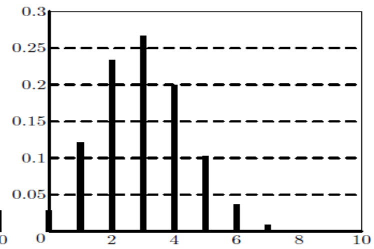
$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X=x_i)$								

Représenter graphiquement cette loi de probabilité par un diagramme en bâtons.

Exercice 17 :

Des deux représentations ci-dessous, laquelle représente une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0{,}3$:





7. Synthèse

Exercice 18 :

On a remarqué de 1 % des pièces sortant d'une machines sont défectueuses. On fait des lots de 10 pièces et on suppose que les défectuosités sont indépendantes.

1) Modéliser la situation avec une loi binomiale.
2) Quelle est la probabilité pour qu'on ait : a) exactement 3 pièces défectueuses ?
b) exactement 10 pièces défectueuses ? c) aucune pièce défectueuse ?
3) En déduire la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse.
4) Combien aura-t-on en moyenne de pièces défectueuses ?

Exercice 19 :

Une société organise une tombola sous la forme de tickets à acheter. La probabilité qu'un ticket commercialisé soit gagnant est de 0,2. Un client tire au hasard de façon indépendante dix tickets et les achète.
On appelle X la variable aléatoire dénombrant les tickets gagnants parmi les dix tickets achetés.

1) Déterminer la loi de probabilité de X .
2) Quelle est la probabilité de gagner exactement deux fois ?
3) Calculer l'espérance de X . Interpréter ce nombre.

Exercice 20 :

Au jeu de fléchettes, on admet qu'un tireur atteint le centre de la cible tous les huit lancers. On suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres. Le tireur fait cinq lancers.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers réussis.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Quelle est la probabilité de rater les 5 lancers ? de réussir exactement 3 lancers ?
3) Quelle est la probabilité de réussir au moins un lancer ? plus de 3 lancers ?
4) Quelle est l'espérance de X ? Combien de lancers faut-il faire pour espérer atteindre deux fois la cible ?

Exercice 21 :

Dans une fête foraine, un jeu de hasard est proposé aux visiteurs. Pour chaque partie, la participation est de 5 euros. Une partie consiste à lancer un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Pour un résultat supérieur ou égal à 5, le joueur reçoit 15 euros, sinon il ne reçoit rien.

1. L'organisateur espère qu'il y aura au moins 1000 parties de jouées. Peut-on penser qu'il gagnera de l'argent ?
2. À la fin de la journée, l'organisateur fait ses comptes : il constate que 2000 parties ont été jouées et il a amassé 2650 euros de gain.

2.1. Combien de parties ont-elles été gagnées par les joueurs ?
2.2. Peut-on considérer que le dé est équilibré ?

Exercice 22:
L'arracheur de dents arrache les dents de ses patients au hasard. Les clients ont une dent malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent avant l'intervention des tenailles du praticien.
1) On considère les dix premiers clients : calculer la probabilité pour qu'aucun de ces dix patients n'y laisse la dent malade.
2) Sur les dix premiers clients, calculer la probabilité pour qu'au moins un de ces clients y laisse la dent malade.
3) Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?

Exercice 23:
Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de fabrication est de 160 € par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 93% des cas et une console de jeux reconnue conforme peut alors être vendue 290 €. Si le test est en revanche négatif, la console de jeux est bradée au prix de 150 €.
1) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles de jeux conformes parmi les 400 produites. Calculer l'espérance de X.
2) On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat.