Cours Probabilités : Loi Binomiale

1. Épreuve de Bernoulli (vidéo 1)

Définition :

On appelle .... une expérience aléatoire n'ayant que .... issues possibles : l'une appelée "succès" et notée souvent S , l'autre appelée "échec" et souvent notée $\overline{S}$.

Pour une épreuve de Bernoulli, on note .... la probabilité de succès. On note donc $P(S)=$..... et $P(\overline{S})=$.....

Exemple 1 : Avec un dé

On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'événement "Obtenir un 6".

L'événement $\overline{S}$ est alors "Ne pas obtenir un six ".

C'est une épreuve de Bernoulli, où $p=P(S)=\frac{1}{6}$ et $P(\overline{S})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

On peut réaliser un arbre à deux branches pour la symboliser :

Exemple 2 : Avec une urne

Dans une urne, on place 4 boules rouges et 6 boules noires.

On gagne quand on obtient

une boule rouge. C'est une épreuve de Bernoulli,

où la probabilité du succès est ....

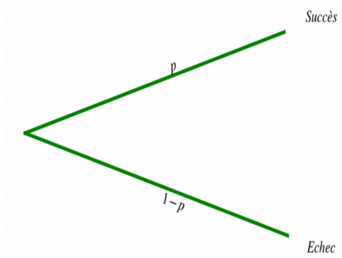
2. Loi de Bernoulli (vidéo 2)

Définition :

Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- La probabilité d'obtenir 1 est égale à ....
- La probabilité d'obtenir 0 est égale à ....

La variable aléatoire X comptabilise le nombre de succès.



$X=x_i$	....	....
$p(X=x_i)$	....	....

Exemple :

Soit X la variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,6.

Cela signifie que l'expérience aléatoire ne possède que deux issues, avec une probabilité de .... pour celle considérée comme succès.

Espérance :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli alors $E(X)=$... ....

Démonstration :

La loi de probabilité de X est

$X=x_i$	....	....
$p(X=x_i)$	....	....

Donc $E(X)=$... ....

3. Schéma de Bernoulli (vidéo 3)

Définition :

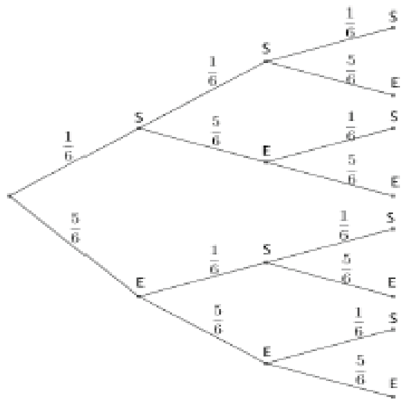
On appelle .... la répétition de .... épreuves de Bernoulli .... et ...., de probabilité de succès .... pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les .... du schéma de Bernoulli.

Exemple : Avec un dé

On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'événement "Obtenir un 6".

Puisque les trois lancers sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres .... et ....



La probabilité de n'obtenir aucun SIX au cours des trois lancers vaut $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\approx 0,58$ soit environ 58 %.

Arbre pondéré du lancer de dé

4. Arbre pondéré et variable aléatoire dans un schéma de Bernoulli (vidéo 4)

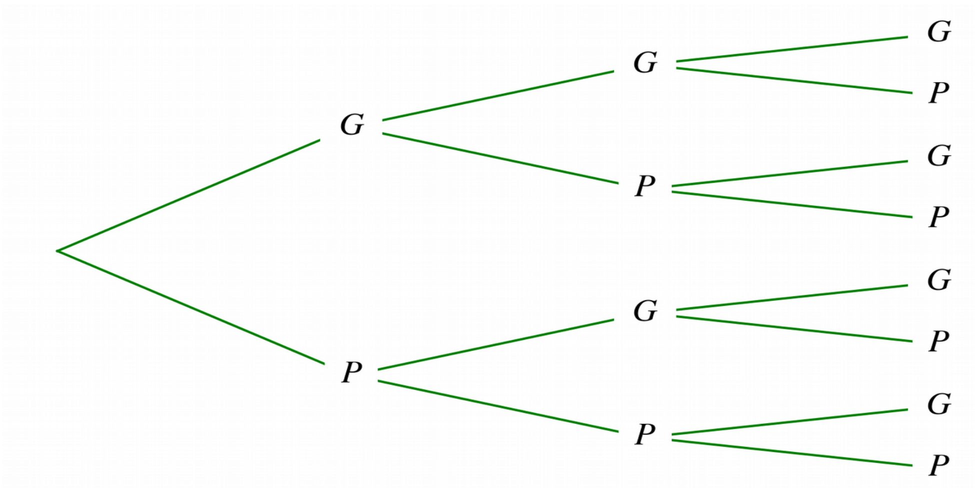
Si le paramètre n (nombre d'expériences) est faible (inférieur à 4), on peut dresser un arbre pondéré pour représenter la situation.

Exemple :

Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre succès.

L'expérience est un schéma de Bernoulli, avec une probabilité de succès de 0,3 renouvelée 3 fois.



$p(X=3)=$.......................

$p(X=2)=$.......................

$p(X=1)=$...

$p(X=0)=$...

On dit que X suit une .... de paramètres $n=3$ et $p=0,3$

5. Coefficient binomiaux :(vidéo 5)

Définition :

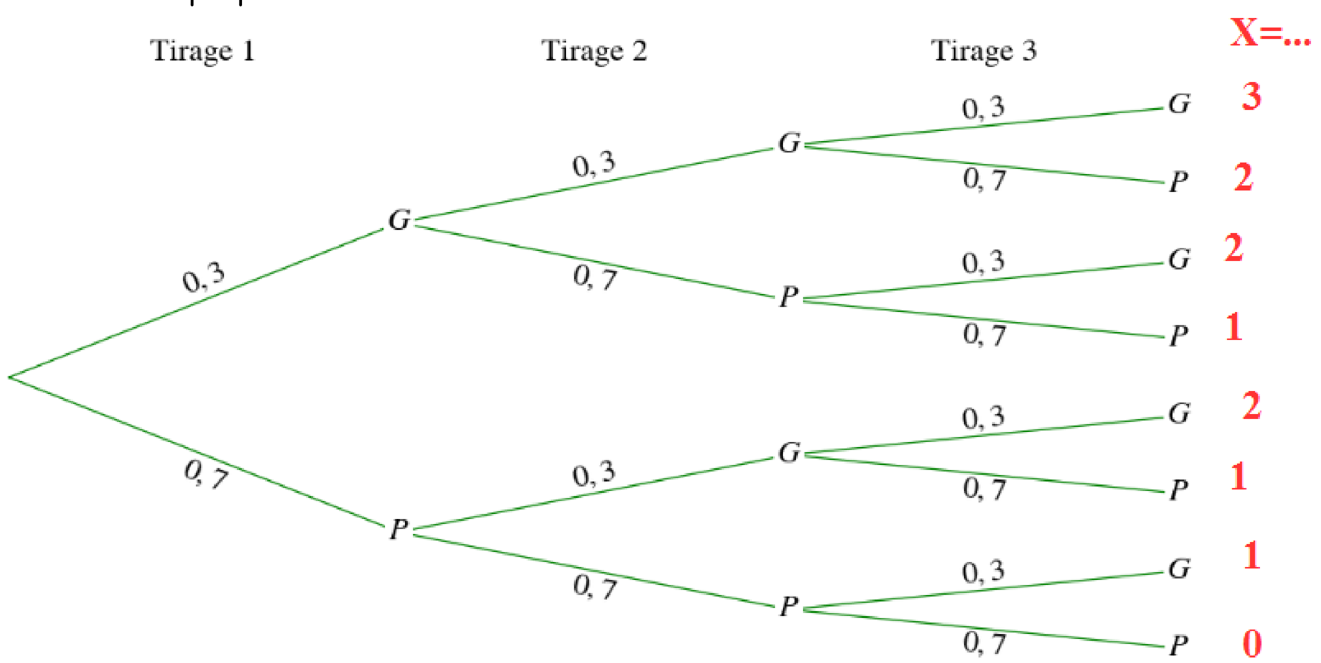
On réalise une expérience suivant une loi de Bernoulli, de paramètre n et p.

Soi k un entier naturel correspondant au nombre de succès.

On appelle coefficient binomial le nombre de chemin conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience. On le note ....

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent :



on lit que $\binom{3}{3}=$......... ; $\binom{3}{2}=$.......... ; $\binom{3}{1}=$.......... ; $\binom{3}{0}=$..........

Propriété :

Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0}=$.......... ; $\binom{n}{1}=$.......... ; $\binom{n}{n}=$..........

6. Calculs des coefficients binomiaux par dénombrement :(vidéo 6)

On peut dénombrer « à la main » :

Calculer $\binom{4}{1}=$..... …...

$\binom{4}{4}=$..... ….................

$\binom{4}{2}=$..... …...

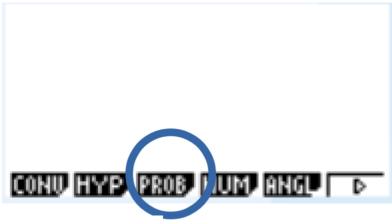
Triangle de Pascal :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

7. Calculs des coefficients binomiaux à la calculatrice : (vidéo 7)

On tape dans le menu RUN puis 

On cherche le sous menu « prob » avec 



Nous allons utiliser 

Pour calculer $\binom{8}{5}$ on tape 

pour sélectionner nCr 

$\binom{8}{5}=.....$

8. Calculer les probabilités d'une loi binomiale : (vidéo 8)

Propriété :

On réalise une expérience suivant une loi de Bernoulli, de paramètres n et p.

La loi Binomiale de paramètre n et p se définie par $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\times(1-p)^{n-k}$

Exemple :

Une expérience consiste à tirer au hasard 8 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.

Calculer la probabilité d'avoir 3 succès.

Les 8 expériences sont indépendantes et identiques, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On définit X la variable aléatoire qui comptabilise les succès, X suit une loi binomiale de paramètres $n=...$ et $p=...$.

$P(X=3)=.........$

8. Calculer les probabilités d'une loi binomiale avec une calculatrice :(vidéo 9)

Méthode :

Dans le Menu Run, Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

BinominalePD(k,n, p) pour calculer $P(X=k)$ et BinominaleCD(k,n, p) pour calculer $P(X\leq k)$

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,6$

Calculer $P(X=2)=....$ et $P(X\leq 2)=....$

9. Calculer les probabilités d'une loi binomiale avec un tableur :(vidéo 10)

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(Nombre de succès,Nombre d'expériences, Probabilité succès, cumulatif ou non)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,5$. Calculer la probabilité d'avoir 6 succès.

On cherche $P(X=6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;FAUX) » et on obtient . . . .

On cherche $P(X\leq 6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;VRAI) » et on obtient . . . .

10. Déterminer une loi Binomiale à la calculatrice (vidéo 11)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$

Déterminer la loi de probabilité de la variable X consiste à déterminer les probabilités de chacune des valeurs de X qui varie de 0 à $n=5$

$P(X=0)$; $P(X=1)$; .... ; $P(X=5)$

On détermine cette loi à la calculatrice avec le Menu Statistique et on répond sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$						

11. Espérance d'une loi Binomiale (vidéo 12)

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p . Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la . . . . . du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé ***l'espérance*** de X .

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n *et* p . Alors : . . . .

Exemple :

Pour déterminer à la calculatrice, l'espérance de X sachant que X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre 6 et $0{,}2$, on établit d'abord la loi de probabilité de X .

Puis, quand la calculatrice affiche la loi de probabilité sur deux listes, choisir Calc (F2), 1var (F1) et $\bar{x}$ donne la moyenne ce qui dans notre cas représente l'espérance X .

12. Représentation graphique d'une loi Binomiale

Méthode :

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons, en plaçant en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Lorsque n est grand, la courbe forme une cloche, centrée autour de l'espérance de la variable aléatoire. **(vidéo 13)**

Avec la calculatrice :**(vidéo 14)**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre *n* = 5 et *p* = 0,4.

On représente graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant P(X=*k*) pour *k* entier, $0 \le k \le 5$.

X	Y1
1	0.0777
2	0.2592
3	0.3456
4	0.2304

Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;

Dans List 1, entrer les valeurs de 0 à 5

Dans List 2, entrer la loi binomiale en sélectionnant :

Dist (F5) puis Binm (F5) puis Bpd (F1)

Puis graphique

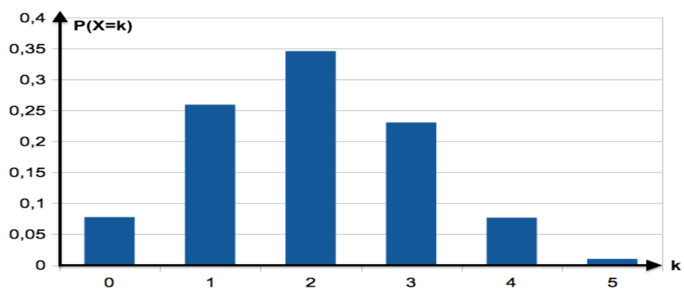
Avec le tableur :**(vidéo 15)**

Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

B1 =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		



puis utiliser le menu représentation graphique.