

Probabilités

1. Définitions et notations de base en probabilités (vidéo 1)

Définition :

Une expérience est lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance quelle sera son résultat.
Les différents résultats possibles sont appelées les de l'expérience.
L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire forme

Vocabulaire et notation :

On appelle une partie de l'univers d'une expérience aléatoire.
Si A est un événement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée

Exemple :

L'expérience aléatoire « lancer un dé à six faces non truqué » possède six issues :
{1;2;3;4;5;6} est donc de cette expérience aléatoire. Si on appelle A l'événement obtenir {1;2} , on notera sa probabilité de réussite.

Propriété :

Pour calculer la probabilité d'un événement, on calcule
C'est un nombre réel, compris entre

Exemple :

Si on note A l'événement obtenir {1;2} , Les deux issues ont la même probabilité de $\frac{1}{6}$, donc
.....

2. Probabilités élémentaires:(vidéo 2)

Cas particulier :

Si l'événement A est , alors $P(A)=0$. Si l'événement A est , alors $P(A)=1$.

Définition :

Si A est un événement, on note $\bar{A}$ l'événement de A . On a alors

Exemple :

Si A est l'événement "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2", $\bar{A}$ est "
..... ". $\bar{A}$ est réalisé par les issues donc
et on a bien

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont lorsque le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple 1 :

Si on lance un dé non truqué 10 fois de suite. Un résultat n'influence pas le lancer suivant. Les dix lancers sont

Exemple 2 :

Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs **avec** remise. Les deux tirages sont

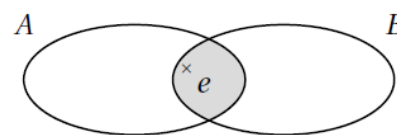
Exemple 3 :

Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs **sans** remise. Les deux tirages Le deuxième tirage est par le résultat du premier.

3. Probabilités et ensembles (vidéo 3)

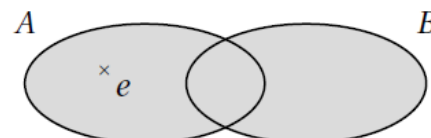
Définition

..... de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B . On la note Ainsi si signifie et



Définition

La de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B . On la note Ainsi signifie ou



Application aux probabilités :

2. Arbre pondéré (vidéo 4)

Dans le cas d'expériences aléatoires répétées, il est souvent pratique de représenter la situation par un :

Exemple :

On joue à pile ou face en lancer une pièce non truquée. Le premier lancer peut se résumer ainsi :

Le deuxième lancer peut se résumer ainsi :

Propriété des arbres :

La somme des pondérations verticales après chaque nœud

Exemple :

Règle de calcul de probabilités sur une même branche :

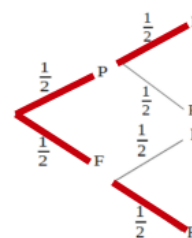
La probabilité d'un événement représenté par un chemin de l'arbre est égal des probabilités rencontrées

Application :

Dans notre exemple, la probabilité d'avoir F puis encore F est

Règle de calcul de probabilités sur plusieurs branches :

Si un événement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en les probabilités de chacun de ces chemins.



Application :

Dans notre exemple, la probabilité d'avoir deux fois la même face est

3. Épreuve de Bernoulli (vidéo 5)

Définition :

On appelle une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une appelée "succès" et notée souvent, l'autre appelée "échec" et souvent notée

Pour une épreuve de Bernoulli, on note la probabilité de succès. On note donc et $P(\bar{S})=1-p$

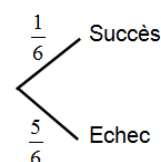
Exemple 1 : Avec un dé

On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'événement "Obtenir un 6".

L'événement $\bar{S}$ est alors "Ne pas obtenir un six".

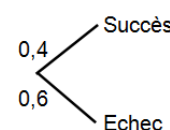
C'est une épreuve de Bernoulli, où $p=.....$ et $P(\bar{S})=.....$

On peut réaliser un arbre à deux branches pour la symboliser :



Exemple 2 : Avec une urne

Dans une urne, on place 4 boules rouges et 6 boules noires. On gagne quand on obtient une boule rouge. C'est une épreuve de Bernoulli, où la probabilité du succès est



4. Schéma de Bernoulli (vidéo 6)

Définition :

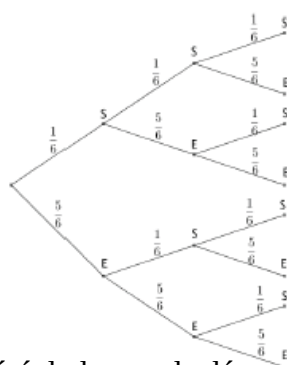
On appelle la répétition de épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier et le nombre réel sont les du schéma de Bernoulli.

Exemple 1 : Avec un dé

On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'événement "Obtenir un 6".

Puisque les trois lancers sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n=.....$ et $p=P(S)=.....$

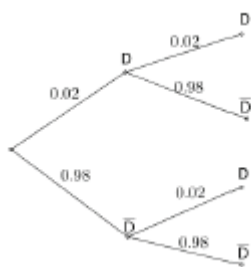


La probabilité de n'obtenir aucun SIX au cours des trois lancers vaut soit environ

Arbre pondéré du lancer de dé

Exemple 2 : Contrôle de qualité

Dans une production de 50 000 pièces, on considère que 2 % des pièces sont défectueuses. On prélève deux pièces au hasard et on note D l'événement "la pièce est défectueuse".



La production étant très importante, on peut considérer que le prélèvement est équivalent à un tirage avec remise. C'est donc un schéma de Bernoulli, de paramètres et la probabilité d'obtenir exactement une pièce défectueuse parmi les deux vaut soit environ

Arbre pondéré du contrôle qualité

5. Loi Binomiale (vidéo 7)

Définition :

On réalise un schéma de Bernoulli composé de expériences aléatoires identiques et indépendantes.

La X associé au schéma compte le nombre de succès obtenus.

On dit que la variable aléatoire X suit une de paramètres et

Exemple :

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie non truquée. On considère comme succès "obtenir Pile".

On réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètre et

Pour étudier les différentes probabilités d'obtenir 1 ; 2 ; .. ; 5 succès dans cette expérience, on note X le nombre de succès. X est appelé la associée au schéma.

La probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note

Application :

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. Une expérience consiste à tirer au hasard 5 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges.

L'expérience est un schéma de Bernoulli, avec une probabilité de succès de 0,4 renouvelée 5 fois.

X suit donc une loi Binomiale de paramètres et

La probabilité d'obtenir 1 boule rouge est donc

La probabilité d'obtenir 2 boules rouges est donc

La probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges est donc

6. Calculer une loi Binomiale avec un arbre pondéré (vidéo 8)

Si le paramètre (nombre d'expériences) est faible (inférieur à 4), on peut dresser un arbre pondéré pour représenter la situation.

Exemple :

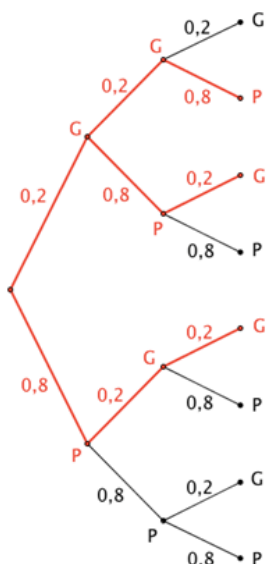
Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,2 à chaque tirage.

On appelle X la variable aléatoire égale

L'expérience est un schéma de Bernoulli, avec une probabilité de succès derenouvelée fois.

X suit donc une loi Binomiale de paramètres et

Pour calculer la probabilité d'avoir deux succès en trois tirages, on représente cet arbre pondéré :



La probabilité d'obtenir 2 boules gagnantes est égale à 0,096.

7. Calculer une loi Binomiale avec une calculatrice :(vidéo 9)

Méthode :

Dans le Menu Run, Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

BinomialePD(Nombre de succès,Nombre d'expériences, Probabilité succès)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,6$

Calculer $P(X=2)=0,2304$ et $P(X \leq 2)=0,31744$

8. Calculer une loi Binomiale avec un tableur :(vidéo 10)

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(Nombre de succès,Nombre d'expériences, Probabilité succès, cumulatif ou non)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,5$. Calculer la probabilité d'avoir 6 succès.

On cherche $P(X=6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;FAUX) »

On obtient 0,2050781

On cherche $P(X \leq 6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;VRAI) »

On obtient 0,828125

9. Déterminer une loi Binomiale (vidéo 11)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$

Déterminer la loi de probabilité de la variable X consiste à déterminer les probabilités de chacune des valeurs de X qui varie de 0 à $n=5$

$P(X=0)$; $P(X=1)$; ; $P(X=5)$

On détermine cette loi à la calculatrice avec le Menu Statistique.

10. Représentation graphique d'une loi Binomiale (vidéo 12)

Exemple :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,4$.

On représente graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X=k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

Dans « MENU », choisir « TABLE » ;

Dans List 1, entrer les valeurs de 0 à 5

Dans List 2, entrer la loi binomiale en sélectionnant :

Dist (F5) puis Binm (F5) puis Bpd (F1)

X	Y1
0	0.0777
1	0.2592
2	0.3456
3	0.2304

Avec le tableur :

Saisir dans la cellule B1 :

=LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

11. Espérance d'une loi Binomiale (vidéo 13)

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p . Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé *l'espérance* de X .

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Alors : $E(X) = n \times p$

Exemple :

Pour déterminer à la calculatrice, l'espérance de X sachant que X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre 6 et 0,2, on établit d'abord la loi de probabilité de X .

Puis, quand la calculatrice affiche la loi de probabilité sur deux listes, choisir Calc (F2), 1var (F1) et $\bar{x}$ donne la moyenne ce qui dans notre cas représente l'espérance X .