Probabilités

1.Définitions et notations de base en probabilités (vidéo 1)

Définition :

Une expérience est ***aléatoire*** lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance quelle sera son résultat.
Les différents résultats possibles sont appelées les ***issues*** de l'expérience.
L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire forme ***l'univers***.

Vocabulaire et notation :

On appelle ***événement*** une partie de l'univers d'une expérience aléatoire.
Si A est un événement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée $p(A)$.

Exemple :

L'expérience aléatoire « lancer un dé à six faces non truqué » possède six issues : $\{1;2;3;4;5;6\}$
$\{1;2;3;4;5;6\}$ est donc l'univers de cette expérience aléatoire. Si on appelle A l'événement obtenir $\{1;2\}$, on notera $p(A)$ sa probabilité de réussite.

Propriété :

Pour calculer la probabilité d'un événement, on calcule $p(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$

C'est un nombre réel, compris entre 0 et 1.

Exemple :

Si on note A l'événement obtenir $\{1;2\}$, Les deux issues ont la même probabilité de $\dfrac{1}{6}$, donc $P(A)=2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

2. Probabilités élémentaires:(vidéo 2)

Cas particulier :

Lorsque l'événement A est ***impossible***, alors $P(A)=0$. Lorsque l'événement A est ***certain***, alors $P(A)=1$.

Définition :

Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement ***contraire*** de A. On a alors $p(A)=1-P(\overline{A})$

Exemple :

Si A est l'événement "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2", $\overline{A}$ est "Obtenir un nombre plus grand que 2". $\overline{A}$ est réalisé par les issues $\{3;4;5;6\}$ donc $P(\overline{A})=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ et on a bien $p(A)=1-P(\overline{A})$

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont ***indépendantes*** lorsque le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple 1 :

Si on lance un dé non truqué 10 fois de suite. Un résultat n'influence pas le lancer suivant. Les dix lancers sont indépendants.

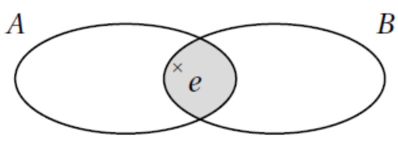
Exemple 2 :

Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs ***avec*** remise. Les deux tirages sont indépendants.

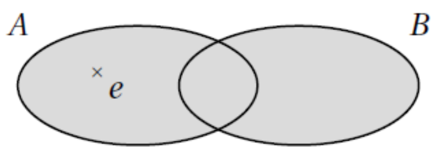
Exemple 3 :
Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs ***sans*** remise. Les deux tirages ne sont pas indépendants. Le deuxième tirage est influencé par le résultat du premier.

3. Probabilités et ensembles (vidéo 3)

Définition
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.
Ainsi si $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ et $e \in B$.



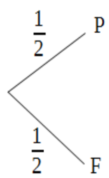
Définition
La ***réunion*** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.
Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ ou $e \in B$.



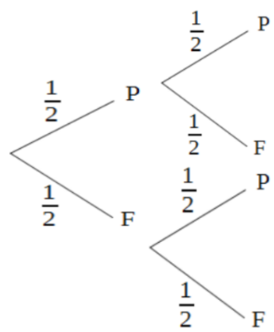
Application aux probabilités : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$

4. Arbre pondéré (vidéo 4)

Dans le cas d'expériences aléatoires répétées, il est souvent pratique de représenter la situation par un ***arbre pondéré*** :
Exemple :
On joue à pile ou face en lancer une pièce non truquée. Le premier lancer peut se résumer ainsi :

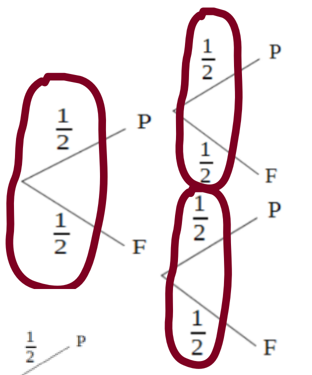


Le deuxième lancer peut se résumer ainsi :

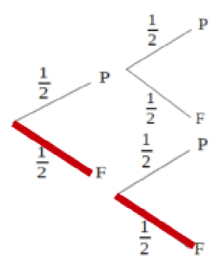


Propriété des arbres :
La somme des pondérations verticales après chaque nœud doit être égale à 1.

Exemple :
Chaque somme doit toujours être égale à 1.

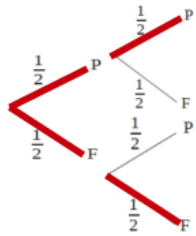


Règle de calcul de probabilités sur une même branche :
La probabilité d'un événement représenté par un chemin de l'arbre est égal au ***produit*** des probabilités rencontrées au cours de ce chemin.



Application :Dans notre exemple, la probabilité d'avoir F puis encore F est $p(FF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Règle de calcul de probabilités sur plusieurs branches :
Si un événement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en ***additionnant*** les probabilités de chacun de ces chemins.



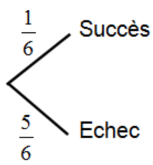
Application :
Dans notre exemple, la probabilité d'avoir deux fois la même face est
$$p=p(FF)+p(PP)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

5. Épreuve de Bernoulli (vidéo 5)

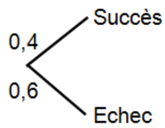
Définition :
On appelle ***épreuve de Bernoulli*** une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une appelée "succès" et notée souvent S, l'autre appelée "échec" et souvent notée $\bar{S}$.

Pour une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès. On note donc $P(S)=p$ et $P(\bar{S})=1-p$

Exemple 1 : Avec un dé
On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'événement "Obtenir un 6".
L'événement $\bar{S}$ est alors "Ne pas obtenir un six ".
C'est une épreuve de Bernoulli, où $p=P(S)=\frac{1}{6}$ et $P(\bar{S})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.
On peut réaliser un arbre à deux branches pour la symboliser :



Exemple 2 : Avec une urne
Dans une urne, on place 4 boules rouges et 6 boules noires. On gagne quand on obtient une boule rouge. C'est une épreuve de Bernoulli, où la probabilité du succès est $p=\frac{4}{10}=0{,}4$

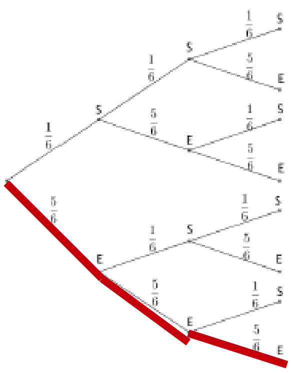


6. Schéma de Bernoulli (vidéo 6)

Définition :
On appelle ***schéma de Bernoulli*** la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.
Le nombre entier n et le nombre réel p sont les ***paramètres*** du schéma de Bernoulli.

Exemple 1 : Avec un dé
On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'événement "Obtenir un 6".
Puisque les trois lancers sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n=3$ et $p=P(S)=\frac{1}{6}$.

La probabilité de n'obtenir aucun SIX au cours des trois lancers vaut $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\approx 0{,}58$ soit environ 58 %.



Arbre pondéré du lancer de dé

7. Variable aléatoire dans un schéma de Bernoulli (vidéo 7)

Définition :

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n expériences aléatoires identiques et indépendantes.

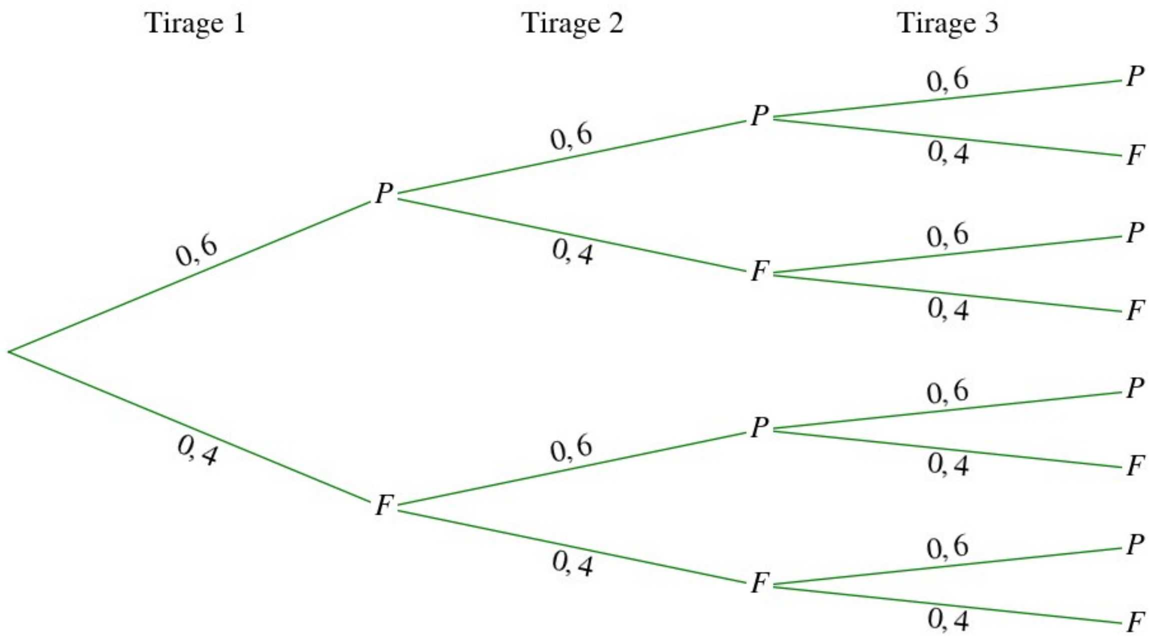
La ***variable aléatoire*** X associé au schéma compte le nombre de succès obtenus.

Exemple :

On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie truquée qui donne une probabilité de 0,6 au côté Pile.

On considère comme succès "*obtenir Pile*".

On réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètre $n=3$ et $p=0,6$.



Pour étudier les différentes probabilités d'obtenir 0 : 1 ; 2 ;3 succès dans cette expérience, on note X le nombre de succès. X est appelé la ***variable aléatoire*** associée au schéma.

Avoir 3 fois « Pile » est caractérisé par $X=3$

La probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note $P(X=3)$.

8. Arbre pondéré et variable aléatoire dans un schéma de Bernoulli (vidéo 8)

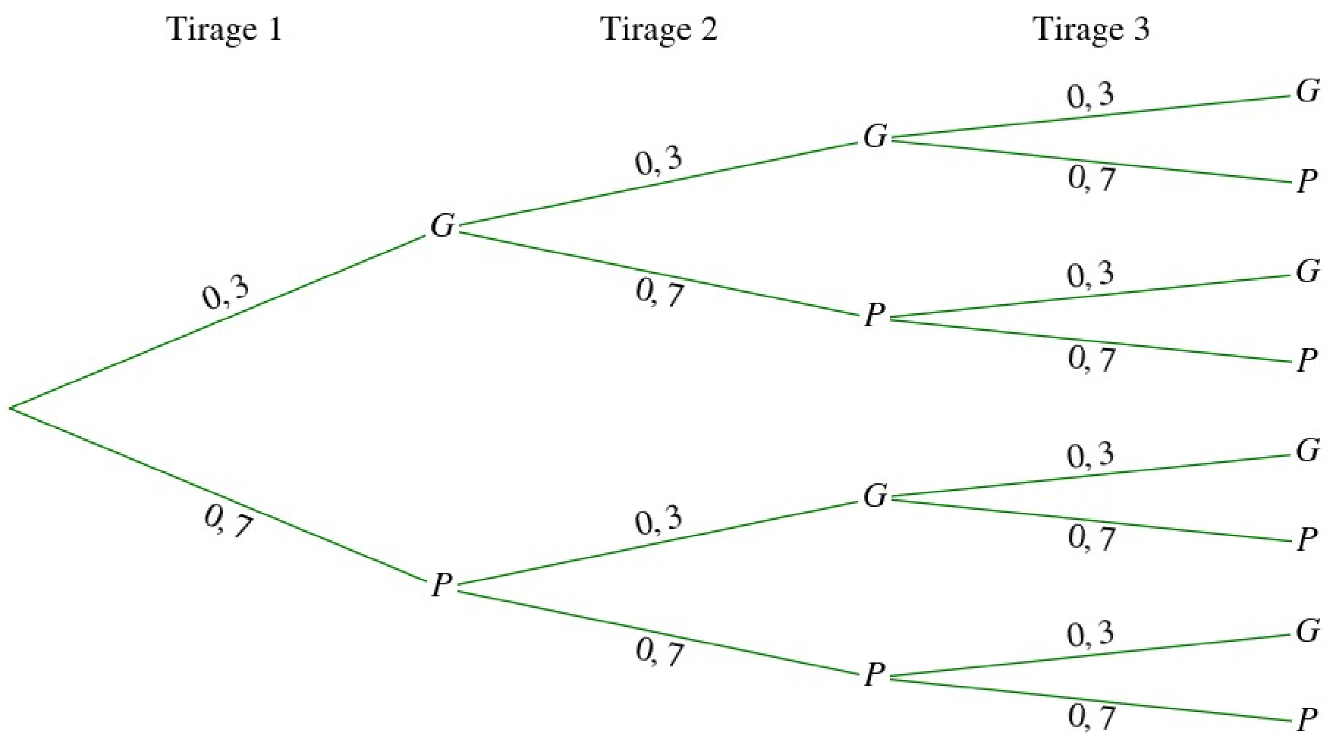
Si le paramètre n (nombre d'expériences) est faible (inférieur à 4), on peut dresser un arbre pondéré pour représenter la situation.

Exemple :

Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre succès.

L'expérience est un schéma de Bernoulli, avec une probabilité de succès de 0,3 renouvelée 3 fois.



$p(X=3)=0{,}3\times0{,}3\times0{,}3=0{,}027$
$p(X=2)=0{,}3\times0{,}3\times0{,}7+0{,}3\times0{,}7\times0{,}3+0{,}7\times0{,}3\times0{,}3=0{,}189$
$p(X=1)=0{,}3\times0{,}7\times0{,}7+0{,}7\times0{,}7\times0{,}3+0{,}7\times0{,}3\times0{,}7=0{,}441$
$p(X=0)=0{,}7\times0{,}7\times0{,}7=0{,}343$

On dit que X suit une loi Binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}3$

<u>9. Utiliser une loi Binomiale avec une calculatrice</u> :(vidéo 9)

<u>Méthode :</u>

Dans le Menu Run, Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé :

BinominalePD(Nombre de succès,Nombre d'expériences, Probabilité succès)

<u>Exemple :</u>

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}6$

Calculer $P(X=2)=0{,}2304$ et $P(X\leq2)=0{,}31744$

<u>10. Utiliser une loi Binomiale avec un tableur :(vidéo 10)</u>

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(Nombre de succès,Nombre d'expériences, Probabilité succès, cumulatif ou non)

<u>Exemple :</u>

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}5$. Calculer la probabilité d'avoir 6 succès.

On cherche $P(X=6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;FAUX) » et on obtient 0,2050781

On cherche $P(X\leq6)$

On entre dans la cellule : « =LOI.BINOMIALE(6 ;10 ;0,5 ;VRAI) » et on obtient 0,828125

11. Déterminer une loi Binomiale à la calculatrice (vidéo 11)

Exemple :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$

Déterminer la loi de probabilité de la variable X consiste à déterminer les probabilités de chacune des valeurs de X qui varie de 0 à $n=5$

$P(X=0)$; $P(X=1)$; …. ; $P(X=5)$

On détermine cette loi à la calculatrice avec le Menu Statistique.

12. Représentation graphique d'une loi Binomiale

Exemple :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre *n* = 5 et *p* = 0,4.

On représente graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant P(X=*k*) pour *k* entier, $0\leq k\leq 5$.

A la calculatrice :**(vidéo 12)**

Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;

Dans List 1, entrer les valeurs de 0 à 5

Dans List 2, entrer la loi binomiale en selectionnant :

Dist (F5) puis Binm (F5) puis Bpd (F1)

Avec le tableur :**(vidéo 13)**

13. Espérance d'une loi Binomiale (vidéo 14)

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p . Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé ***l'espérance*** de X .

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n *et* p . Alors : $E(X)=n\times p$

Exemple :

Pour déterminer à la calculatrice, l'espérance de X sachant que X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre 6 et $0,2$, on établit d'abord la loi de probabilité de X .

Puis, quand la calculatrice affiche la loi de probabilité sur deux listes, choisir Calc (F2), 1var (F1) et $\bar{x}$ donne la moyenne ce qui dans notre cas représente l'espérance X .