Probabilités : Rappels, Variable aléatoire et Espérance

1.Définitions et notations de base en probabilités (vidéo 1)

Définition :

Une expérience est ***aléatoire*** lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance quelle sera son résultat.
Les différents résultats possibles sont appelées les ***issues*** de l'expérience.
L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire forme ***l'univers***.

Vocabulaire et notation :

On appelle ***événement*** une partie de l'univers d'une expérience aléatoire.
Si A est un événement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée $p(A)$.

Exemple :

L'expérience aléatoire « lancer un dé à six faces non truqué » possède six issues : $\{1;2;3;4;5;6\}$
$\{1;2;3;4;5;6\}$ est donc l'univers de cette expérience aléatoire. Si on appelle A l'événement obtenir $\{1;2\}$, on notera $p(A)$ sa probabilité de réussite.

Propriété :

Pour calculer la probabilité d'un événement, on calcule $p(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$

C'est un nombre réel, compris entre 0 et 1.

Exemple :

Si on note A l'événement obtenir $\{1;2\}$, Les deux issues ont la même probabilité de $\dfrac{1}{6}$, donc
$P(A)=2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

2. Probabilités élémentaires:(vidéo 2)

Cas particulier :

Lorsque l'événement A est ***impossible***, alors $P(A)=0$. Lorsque l'événement A est ***certain***, alors $P(A)=1$.

Définition :

Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement ***contraire*** de A. On a alors $p(A)=1-P(\overline{A})$

Exemple :

Si A est l'événement "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2", $\overline{A}$ est "Obtenir un nombre plus grand que 2". $\overline{A}$ est réalisé par les issues $\{3;4;5;6\}$ donc $P(\overline{A})=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ et on a bien $p(A)=1-P(\overline{A})$

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont ***indépendantes*** lorsque le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple 1 :

Si on lance un dé non truqué 10 fois de suite. Un résultat n'influence pas le lancer suivant. Les dix lancers sont indépendants.

Exemple 2 :

Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs ***avec*** remise. Les deux tirages sont indépendants.

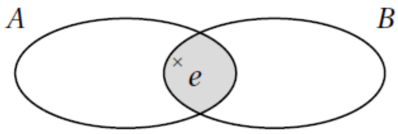
Exemple 3 :

Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs ***sans*** remise. Les deux tirages ne sont pas indépendants. Le deuxième tirage est influencé par le résultat du premier.

3. Probabilités et ensembles (vidéo 3)

Définition

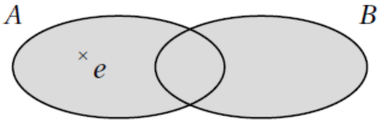
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.
Ainsi si $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ et $e \in B$.



Application aux probabilités : On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Définition

La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.
Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ ou $e \in B$.

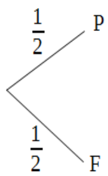


Application aux probabilités : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$
en particulier, si deux événements A et B sont incompatibles si $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

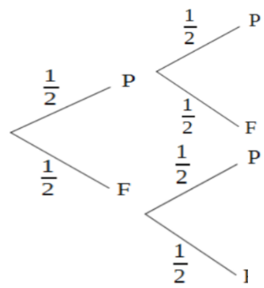
4. Arbre pondéré (vidéo 4)

Dans le cas d'expériences aléatoires répétées, il est souvent pratique de représenter la situation par un ***arbre pondéré*** :

Exemple :
On joue à pile ou face en lancer une pièce non truquée.
Le premier lancer peut se résumer ainsi :

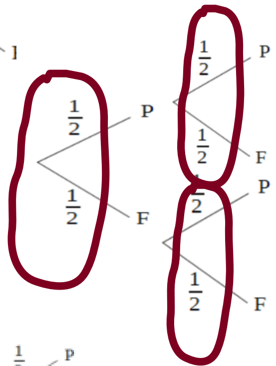


Le deuxième lancer peut se résumer ainsi :

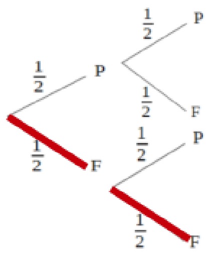


Propriété des arbres :
La somme des pondérations verticales après chaque nœud doit être égale à 1.

Exemple :
Chaque somme doit toujours être égale à 1.

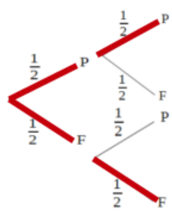


Règle de calcul de probabilités sur une même branche :
La probabilité d'un événement représenté par un chemin de l'arbre est égal au ***produit*** des probabilités rencontrées au cours de ce chemin.



Application :Dans notre exemple, la probabilité d'avoir F puis encore F est $p(FF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Règle de calcul de probabilités sur plusieurs branches :
Si un événement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en ***additionnant*** les probabilités de chacun de ces chemins.



Application :
Dans notre exemple, la probabilité d'avoir deux fois la même face est
$$p = p(FF) + p(PP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

5. Variable aléatoire (vidéo 5)

Exemple :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble des issues est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$

On convient que si la face 6 apparaît on gagne 5 € ,
si la face 5 apparaît on gagne 3 €,
si la face 4 apparaît on gagne 1 €,
sinon on perd 2 €.

On définit une fonction X qui a chaque issue de associe le « gain » obtenu,
On a $X(1)=-2$; $X(2)=-2$; $X(3)=-2$; $X(4)=1$; $X(5)=3$; $X(6)=5$

Définition : Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire X définie sur Ω associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

On a donc le schéma : X (une issue de l'expérience aléatoire)= un nombre réel

Une variable aléatoire permet de numériser les issues d'une expérience aléatoire.

6.Loi de probabilité (Vidéo 6)

Exemple :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble des issues est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$

On convient que si la face 6 apparaît on gagne 5 € ,
si la face 5 apparaît on gagne 3 €,
si la face 4 apparaît on gagne 1 €,
sinon on perd 2 €.

On définit la variable aléatoire X qui a chaque issue de associe le « gain » obtenu,
On a $X(1)=-2$; $X(2)=-2$; $X(3)=-2$; $X(4)=1$; $X(5)=3$; $X(6)=5$

$X=-2$ correspond à l'événement obtenir $\{1;2;3\}$
$X=1$ correspond à l'événement obtenir $\{4\}$
$X=3$ correspond à l'événement obtenir $\{5\}$
$X=5$ correspond à l'événement obtenir $\{6\}$

On l'écrit ainsi : $P(X=-2)=\frac{1}{2}$ et $P(X=1)=P(X=3)=P(X=5)=\frac{1}{6}$

On peut alors définir la loi de probabilité de X :

x_i	-2	1	3	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition :

Soit une variable aléatoire X définie sur un ensemble E et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i , la probabilité $P(x_i)$

Loi de probabilité déterminée par un arbre

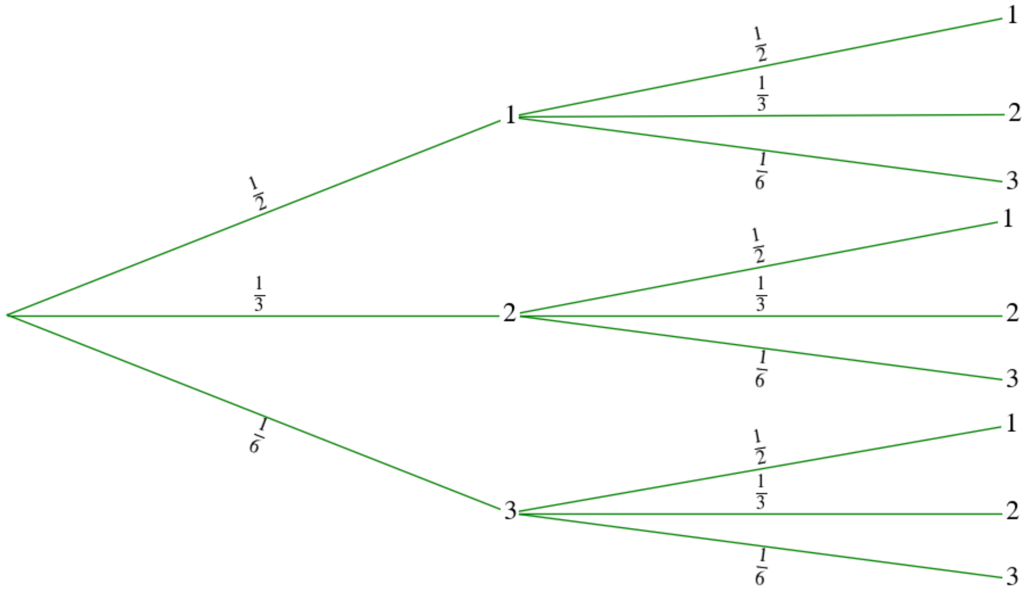
Exemple :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont trois faces sont numérotées de 1 ; deux faces numérotées 2 et une face numérotée 3.

On définit la variable aléatoire X qui détermine le nombre de points obtenus en deux lancers.

Déterminer la loi de probabilité de X

On peut schématiser l'expérience avec cet arbre



$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

$P(X=5)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

$P(X=6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

On peut alors définir la loi de probabilité de X :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Espérance d'une variable aléatoire

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble E et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. alors :

$E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+\ldots+x_n\times p(X=x_n)$

On retient que l'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne obtenue
pour un grand nombre de tirage

Exemple :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'ensemble des issues est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$

On convient que si la face 6 apparaît on gagne 5 € ,
si la face 5 apparaît on gagne 3 €,
si la face 4 apparaît on gagne 1 €,
sinon on perd 2 €.
On définit la variable aléatoire X qui a chaque issue de associe le « gain » obtenu,
On peut définir la loi de probabilité de X :

x_i	-2	1	3	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$-2\times\frac{1}{2}+\frac{1\times1}{6}+\frac{3\times1}{6}+\frac{5\times1}{6}=-1+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=-1+\frac{9}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ On note $E(X)=\frac{1}{2}$

Exemple :

Pour déterminer à la calculatrice, l'espérance de X sachant que X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre 6 et $0,2$, on établit d'abord la loi de probabilité de X .
Puis, quand la calculatrice affiche la loi de probabilité sur deux listes, choisir Calc (F2), 1var (F1) et $\bar{x}$ donne la moyenne ce qui dans notre cas représente l'espérance X .