Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques :(vidéo 1)

Définition :

Une suite arithmétique (u_n) est définie par la donnée d'un premier terme u_0 , d'une raison r et de la formule de récurrence : $u_{n+1}=u_n+r$

Exemple :

soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0=3$ et de raison -2.

Calculer $v_1=v_O+r=3+(-2)=1$

$v_2=v_1+r=1-2=-1$

$v_3=v_2+r=-1-2=-3$

$v_6=v_5+r=v_4+r+r=v_3+r+r+r=v_3+3r=-3+3\times(-2)=-9$

Propriété : Expression de u_n en fonction de n

(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si , pour tout entier n , on a $u_n=u_0+n\times r$

+ r + r + r + r

u_0	$u_1=u_0+r$	$u_2=u_0+2\times r$	$u_3=u_0+3\times r$	$u_4=u_0+4\times r$	$u_5=u_0+5\times r$

Exemple :

soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0=1$ et de raison 2. Calculer v_{50} .

Comme (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0=1$ et de raison $r=2$ alors , pour tout entier n , on a $v_n=v_0+n\times r$ donc $v_n=1+n\times 2=2n+1$. En particulier, $v_{50}=2\times 50+1=101$

Propriété : (vidéo 3)

Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

- Si $r>0$ alors la suite est croissante
- Si $r<0$ alors la suite est décroissante

Preuve :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . On a alors : $u_{n+1}=u_n+r$

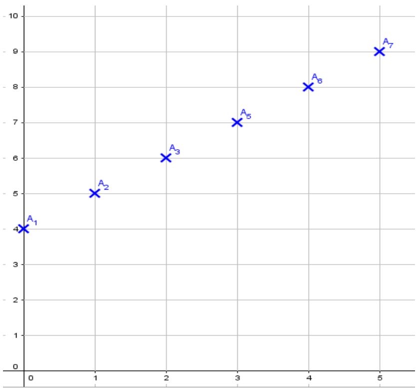
Pour déterminer la variation de (u_n) , on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$ or $u_{n+1}-u_n=u_n+r-u_n=r$

Définition : (vidéo 4)

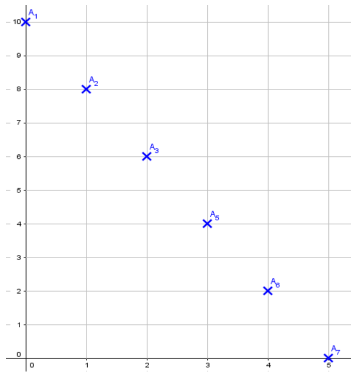
La représentation graphique d'une suite arithmétique forme des points alignés. Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution linéaire.

Représentation graphique :

(u_n) est la suite de premier terme $u_0=4$ raison $r=1$



(u_n) est la suite de premier terme $u_0=10$ et de raison $r=-2$



2. Suites géométriques :(vidéo 5)

Définition :
Une suite géométrique (u_n) est définie par la donnée d'un premier terme u_0 , d'une raison q et de la formule de récurrence : $u_{n+1}=q\times u_n$

	x q	x q	x q	x q	x q
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5

Exemple :
soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0=10$ et de raison 0,2.
Calculer v_1 ; v_2 ; v_3
Réponse :
Comme (v_n) une suite géométrique de raison 0,2 , par définition, on a pour tout entier naturel :
$v_{n+1}=0{,}2\times v_n$
en particulier, $v_1=0{,}2\times v_0=0{,}2\times 10=2$; $v_2=0{,}2\times v_1=0{,}2\times 2=0{,}4$ et $v_3=0{,}2\times v_2=0{,}2\times 0{,}4=0{,}08$

Propriété : Terme général d'une suite géométrique **(vidéo 6)**
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors $u_n=u_0\times q^n$

	x q	x q	x q	x q	x q
u_0	$u_1=u_0\times q$	$u_2=u_0\times q^2$	$u_3=u_0\times q^3$	$u_4=u_0\times q^4$	$u_5=u_0\times q^5$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=3$ et de raison $q=2$, calculer u_{20}
Réponse :
(u_n) est une suite géométrique donc par propriété de cours,
on sait que pour tout n $u_n=u_0\times q^n$ Comme $u_0=3$ et $q=2$ alors $u_n=3\times 2^n$
donc $u_{20}=3\times 2^{20}=3\,145\,728$

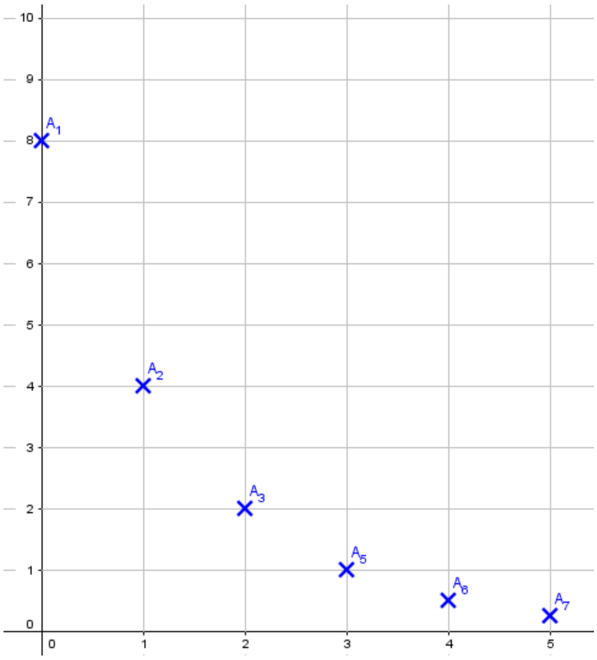
Propriété : Sens de variation d'une suite géométrique **(vidéo 7)**
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q>0$.
Si $u_0>0$ et $q>1$ alors la suite est croissante
et $0<q<1$ alors la suite est décroissante
Si $u_0<0$ et $q>1$ alors la suite est décroissante
et $0<q<1$ alors la suite est croissante

Preuve :**(vidéo 8)**
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q>0$.
On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n=q^{n+1}\times u_0-q^n\times u_0=q^n\times u_0\times(q-1)$
On a $q>0$ donc $q^n>0$ donc : $u_{n+1}-u_n$ est donc du signe de $u_0(q-1)$
si $u_0>0$ et $q-1>0$, $u_{n+1}-u_n>0$ La suite (u_n) sera alors croissante .
et $q-1<0$, $u_{n+1}-u_n<0$ la suite (u_n) sera décroissante.

si $u_0<0$ et $q-1>0$, $u_{n+1}-u_n<0$ La suite (u_n) sera alors décroissante.
et $q-1<0$, $u_{n+1}-u_n>0$ la suite (u_n) sera croissante .

<u>Définition :</u>**(vidéo 9)**
La représentation graphique d'une suite géométrique forme des points qui ne sont pas alignés. On parle d'une croissance (ou décroissance) exponentielle.

(u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$



(u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$