Fonctions affines
Problèmes du premier degré

1. Reconnaître et utiliser une fonction affine (vidéo 1)

Définition:

On appelle **fonction affine** toute fonction f qui s'écrit sous la forme $f(x)=ax+b$, où a et b sont des nombres fixés.

Exemples :

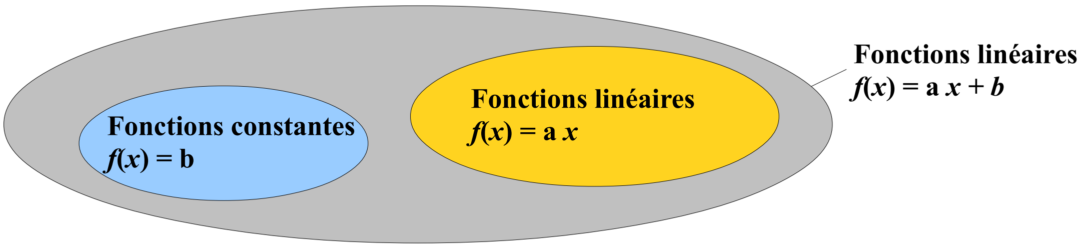
$f(x)=3x+2$ ici $a=3$ et $b=2$

$f(x)=-4x+1$ ici $a=-4$ et $b=1$

Et $f(x)=3x^2+2$? Ce n'est pas une fonction affine.

Cas particuliers de fonction affine :

- si $a=0$
  La fonction affine s'écrit : $f(x)=0\times x+b=b$
  On appelle cette famille de fonctions des **fonctions constantes.**
  Exemples : $f(x)=4$
  alors : $f(3)=4$ $f(-5)=4$ etc....
- si $b=0$ La fonction affine s'écrit : $f(x)=a\times x+0=ax$
  On appelle cette famille de fonctions des **fonctions linéaires**.
  Exemples
  $f(x)=2x$ est la fonction linéaire de coefficient 2
  $f(x)=-4x$ est la fonction linéaire de coefficient - 4
  Bilan :



2. Propriété des fonctions affines :

Exemple :

Soit $f(x)=3x+1$

x	0	1	2	3	8	10	13
$f(x)=3x+1$	1	4	7	10	25	31	40

Est-ce un tableau de proportionnalité ?

On constate que non. Les produits en croix ne fonctinennt pas.

Que peut-on remarquer ??

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{10-4}{3-1}=\frac{6}{2}=3 \qquad \frac{f(10)-f(2)}{10-2}=\frac{31-7}{10-2}=\frac{24}{8}=3$$

On dit que l'accroissement est constant.

Théorème :

Si f est une fonction affine définie par $f(x)=ax+b$, alors :pour tout nombre u et v distincts, $\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$

On dit que l'accroissement est proportionnel.

3. Représenter graphiquement une fonction affine

Rappel :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Exemple :

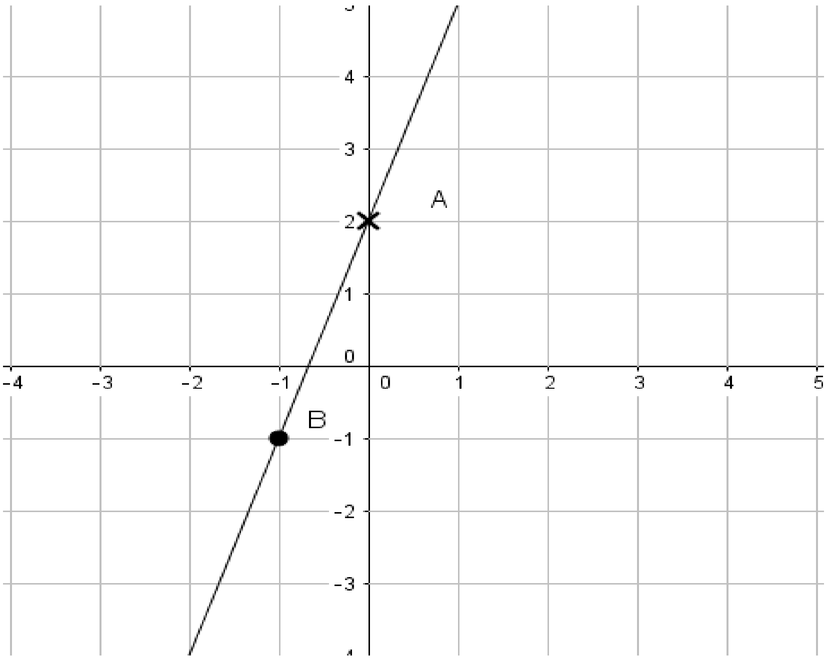
Représenter graphiquement la fonction $f(x)=3x+2$

f est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite (d).

On cherche deux points :

$f(0)=2$ donc $A(0;2)\in(d)$

$f(-1)=-1$ donc $B(-1;-1)\in(d)$



Propriété graphique :

Si f est une fonction affine définie par $f(x)=ax+b$

a est appelé le **coefficient directeur** de la droite, il mesure la pente.

b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

- Il mesure « l'étage » où la droite coupe d'axe des ordonnées.
- Le point de coordonnées (0;b) appartient à la droite

4. Donner le tableau de signe de $ax+b$ pour des valeurs de a et b données

On cherche à connaître le signe d'une expression du type $ax+b$.

1ère méthode : résolution de l'inéquation (3ème)

On résout l'inéquation $ax+b>0$

$ax>-b$

si $a>0$, alors $x>\frac{-b}{a}$ $\qquad S=]-\frac{b}{a};+\infty[$

si $a<0$, alors $x<\frac{-b}{a}$ $S=]-\infty;-\frac{b}{a}[$

Applications :

Résoudre $2x-3>0$ d'où $x>\frac{3}{2}$ et $S=]\frac{3}{2};+\infty[$

On peut résumer le signe de l'expression $2x-3$ dans un tableau :

x	- ∞		$\frac{3}{2}$		+ ∞
$2x-3$		-	0	+	

Déterminer le signe de $-3x+2$ d'où $x\leq\frac{-2}{-3}$ et $S=[-\infty;\frac{2}{3}[$

x	- ∞		$\frac{2}{3}$		+ ∞
$-3x+2$		+	0	-	

2ème méthode : (seconde)

Propriété :

Pour trouver directement le signe d'une expression du type $ax+b$, avec a et b non nuls, on peut directement utiliser ce tableau :

x	- ∞		$\frac{-b}{a}$		+ ∞
$ax+b$		**Opposé du signe de a**	0	**Signe de a**	

Application :

- étude du signe de $A(x)=2x+1$

A est une fonction affine puisqu'elle est sous la forme $A(x)=ax+b$ avec $a=2$ et $b=1$

La fonction s'annule en $x=-\frac{b}{a}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

On sait, d'après le cours que A est du signe de $a=2>0$

sur l'intervalle $]-\frac{b}{a};+\infty[$ donc sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		-	0	+	

- étude du signe de $B(x)=4-2x$

B est une fonction affine puisqu'elle est sous la forme $B(x)=ax+b$
avec $a=-2$ et $b=4$ La fonction s'annule en $x=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{-2}=2$
On sait, d'après le cours que B est du signe de $a=-2<0$
sur l'intervalle $]-\frac{b}{a};+\infty[$ donc sur $]2;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4-2x$		+	0	-	

5. Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du 1er degré

Exemple 1 :
Résoudre $(4x+1)(3-x)\geq 0$

Méthode :

- étude du signe de $f(x)=4x+1$

f est une fonction affine puisqu'elle est sous la forme $f(x)=ax+b$
avec $a=4$ et $b=1$ donc la fonction f s'annule en $x=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{4}$
On sait, d'après le cours que f est du signe de $a=4>0$
sur l'intervalle $]-\frac{b}{a};+\infty[$ donc sur $]-\frac{1}{4};+\infty[$

- étude du signe de $g(x)=3-x$

g est une fonction affine puisqu'elle est sous la forme $g(x)=ax+b$
avec $a=-1$ et $b=3$
La fonction s'annule en $x=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{-1}=3$
On sait, d'après le cours que g est du signe de $a=-1<0$
sur l'intervalle $]-\frac{b}{a};+\infty[$ donc sur $]3;+\infty[$

- on dresse alors un tableau de signes de l'expression :

x	- ∞		$\frac{-1}{4}$		3		+ ∞
$4x+1$		-	0	+	⋮	+	
$3-x$		+	⋮	+	0	-	
$(4x+1)(3-x)$		-	⋮	+	⋮	-	

Et il vient $S=[-\frac{1}{4};3]$

Exemple 2:

Étudier le signe de cette expression :

$A(x)=(3x-1)^2-(2x+7)^2$

- Il faut factoriser l'expression pour étudier le signe d'un produit.

On reconnaît une identité remarquable de la forme a^2-b^2 :

$A(x)=(3x-1)^2-(2x+7)^2=[(3x-1)+(2x+7)][(3x-1)-(2x+7)]$

$A(x)=(5x-6)(3x-1-2x-7)=(5x-6)(x-8)$

- étude du signe de $(5x-6)$:

On reconnaît une expression du premier degré de la forme $ax+b$ avec $a=5$ et $b=-6$

$\frac{-b}{a}=\frac{-(-6)}{5}=\frac{6}{5}$ et $a=5>0$

- étude du signe de $(x-8)$:

On reconnaît une expression du premier degré de la forme $ax+b$ avec $a=1$ et $b=-8$

$\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{1}=8$ et $a=1>0$

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		8		$+\infty$
$5x-6$		-	0	+	⋮	+	
$x-8$		-	⋮	-	0	+	
$(5x-6)(x-8)$		+	0	-	0	+	