Dérivation

1 Taux d'accroissement d'une fonction (vidéo 1)

Soit f une fonction définie sur un intervalle D comprenant les nombres a et b.

Propriété :

Soit deux point appartenant à la courbe représentative d'une fonction f tels que $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation :............................

Définition :

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b est le rapport défini par :

....

Dans le cas où A et B sont assez proches, il est plus simple de définir l'abscisse de B par le nombre $a+h$, h désignant un nombre quelconque non-nul tel que $a+h$ appartiennent à D.

Définition :

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$ est le rapport défini par :

…...

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point (vidéo 2)

Quand h se rapproche de plus en plus de zéro, sans jamais l'atteindre (c'est interdit), cette quantité peut tendre vers un nombre.

Si ce nombre existe, il est le .... à la courbe au point d'abscisse a.

On le note ....

Exemple :

Calculer si possible le coefficient directeur en $a=2$, de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=3x^2$

On calcule :

On appelle donc ....

Définition : (vidéo 3)
Soit f une fonction définie sur un intervalle D et $a \in D$ et désignant un nombre quelconque non-nul tel que $a+h$ appartiennent à D :

On dit que f est dérivable en a lorsque ……………………………………………………………. existe.

Ce nombre limite L est appelé nombre dérivé en a de f .
On le note ………………

Dans l'exemple précédent, on a trouvé que pour $f(x)=3x^2$, ………………

3. Équation de la tangente à la courbe en un point

Propriété : (vidéo 4)
Soit f une fonction définie sur un intervalle D et un point $A(a;f(a))$ tel que $a \in D$
La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point A d'équation :
………………………………

Démonstration :
La fonction f est dérivable en a , sa courbe représentative admet donc une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation réduite s'écrit donc sous la forme : $y=f'(a)\times x+b$
Comme ………………………………ses coordonnées vérifient l'équation :

$f(a)=f'(a)\times a+b$ d'où $b=f(a)-f'(a)\times a$ et il vient : $y=f'(a)\times x+f(a)-f'(a)\times a$

au final : ………………………………………………

Application : (vidéo 5)
En s'aidant de la calculatrice, déterminer l'équation de la tangente en 2 de la courbe représentative de la fonction f définie sur un intervalle ℝ par $f(x)=0{,}5x^3-3x$.
Représenter la situation à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

Complément : (vidéo 6)
Retrouver l'équation d'une tangente avec sa calculatrice

4. Fonction dérivée
Définition : (vidéo 7)
Soit f une fonction est dérivable sur un intervalle I (ou une réunion d'intervalles) si et seulement si elle est ………………………….. en tout point de l'intervalle I.

Si une fonction f est dérivable sur I, on appelle ………………………………de f , la fonction notée ………………

définie sur I qui à tout antécédent a associe.....................

Calcul d'une dérivée :

Déterminer si la fonction n f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si oui, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Quand le nombre h tend vers 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers ....

Ce nombre existe bien pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a donc montré que f était dérivable sur $\mathbb{R}$ et que ....

Dérivées à connaître :(vidéo 8)

- **Fonction constante :**

$f(x)=k$ avec $k\in\mathbb{R}$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

exemple : $f(x)=3$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

- **Fonction affines :**

$f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ $et\, b\in\mathbb{R}$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

exemple : $f(x)=4x-2$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

- **Fonction carré :**

$f(x)=x^2$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

- **Fonction puissance :**

$f(x)=x^n$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

exemple : $f(x)=x^4$ $D=\mathbb{R}$ alors .... $I=\mathbb{R}$

- **Fonction inverse :**

$f(x)=\frac{1}{x}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors .... $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- **Fonction racine carrée :**

$f(x)=\sqrt{x}$ $D=\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$ alors .... $I=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Opérations sur les fonctions dérivées :(vidéo 9)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et sa dérivée est ....
- La fonction $k\times u$ est dérivable sur I et sa dérivée est ....

Applications : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3+4x^2-5x+7$

f est la somme de ……… fonctions de références :
$u(x)=3x^3$ $v(x)=4x^2$ $w(x)=-5x$ $z(x)=7$

On sait que $u'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $v'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $w'(x)=\ldots\ldots$ $z'(x)=\ldots..$

On a alors $f(x)=u(x)+v(x)+w(x)+z(x)$
Comme $f'(x)=u'(x)+v'(x)+w'(x)+z'(x)$, alors d'après la propriété de dérivée d'une somme

$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dérivée d'un produit de fonctions : (vidéo 10)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I,

- La fonction $u\times v$ est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………….
- La fonction u^2 est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………….

Applications :
Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-5)(x^2+4x-3)$

f est le produit de 2 fonctions définie sur $\mathbb{R}$: ………………………. ……………………….
Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(x)=u(x)\times v(x)$ alors d'après le cours : $f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On sait que $u'(x)=\ldots..$ $v'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ……………………………………………………………………………………………………

Dérivée d'un quotient de fonctions : (vidéo 11)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I,

- La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x)\neq 0$ et sa dérivée est ……………………….
- La fonction $\frac{1}{v}$ dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x)\neq 0$ et sa dérivée est ……………………….

Applications :
Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x)=\frac{2x+3}{x-3}$

f est le quotient de 2 fonctions définie sur $\mathbb{R}$: ………………………. et ……………………….
Elle est donc dérivable pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $v(x)=x-3$

f est donc dérivable sur ………………………. $(\frac{u}{v})'=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
On sait que $u'(x)=\ldots$ $v'(x)=\ldots.$
$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ……