ACTIVITÉ 1

À la recherche de paraboles

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont susceptibles de représenter une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où une courbe ne convient pas, indiquer pourquoi.

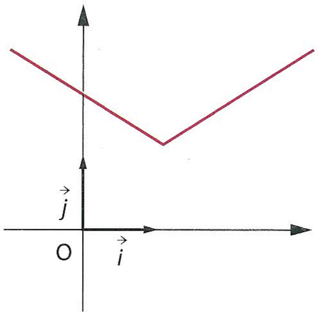


Figure 1

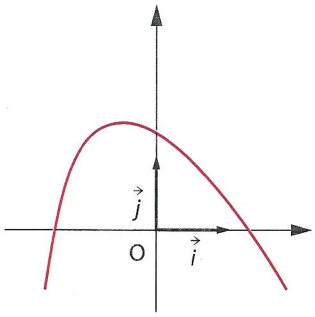


Figure 2

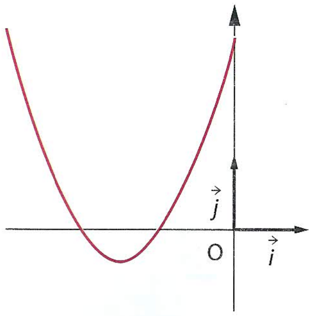


Figure 3

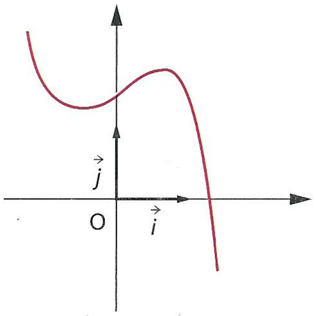


Figure 4

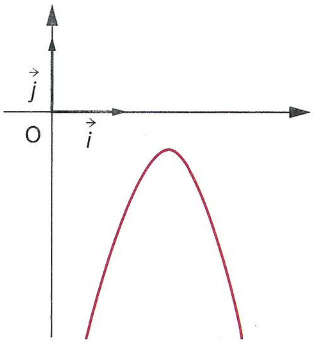


Figure 5

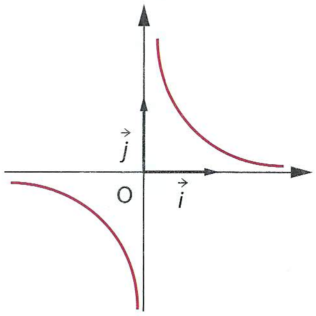


Figure 6

ACTIVITÉ 2

À la recherche de fonctions polynômes du second degré

Parmi les tableaux de variation suivants, lesquels sont susceptibles de correspondre à une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où un tableau de variation ne convient pas, indiquer pourquoi.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	-5	↘	

Tableau 1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Tableau 2

x	-6		-3		4		6
$f(x)$		↘	0	↗	5	↘	

Tableau 3

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

Tableau 4

x	-3		1		5
$f(x)$	2	↘	0	↗	2

Tableau 5

x	-4		-1		3
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

Tableau 6

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Consolider les acquis	3, 5, 9, 10	1, 2, 4, 6, 7, 8, 11
Résoudre des équations du second degré sans les formules	12	13, 14
Utiliser les formules pour résoudre des équations du second degré	15	16 à 20
Faire le lien avec les représentations graphiques	29, 34	30 à 33 55 à 58
Étudier le signe d'un trinôme ; résoudre une inéquation ; interpréter graphiquement une équation, une inéquation	21, 22	23 à 28
Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème	36, 46	35, 37 à 45, 47 à 50
Consolider les acquis sur la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues	51	52 à 54
TICE Utiliser une calculatrice, un tableur		75
ALGO Utiliser un algorithme	58, 59 ,60	

Développement

1. + Développer chacune des expressions suivantes et ordonner les polynômes obtenus dans l'ordre des puissances décroissantes de x ou de t.

1. $P(x)=(2x^3-3x^2+4x-2)-(-x^2+2x+2)$.

2. $P(x)=(x+1)(x+1)-(x+2)x$.

3. $P(t)=(2t-3)(2t+3)-(2t-3)^2$.

2. + Même énoncé qu'à l'exercice **1** avec les expressions suivantes.

1. $P(x)=(-x-1)^2+(x+1)^2$.

2. $P(x)=x(3x+2)^2-(3x-2)^2$.

3. $P(t)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$.

4. $P(t)=\dfrac{t-5}{3}+\dfrac{2-t}{6}-t^2$.

Racine d'un polynôme

▶ *a est **racine** du polynôme P(x) si et seulement si : P(a) = 0.*

3. + – 1 est-il racine du trinôme : $P(x)=-x^2+x+2$?

CORRIGÉ P. 253

4. + 2 est-il racine du trinôme : $P(x)=-2x^2+7x-6$?

5. + Déterminer deux polynômes du second degré $P(x)$ dont une racine est – 2.

CORRIGÉ P. 253

6. + Déterminer deux polynômes du second degré $P(x)$ admettant pour racines : – 1 et – 3.

Équations du premier degré (ou se ramenant au premier degré)

Pour consolider les acquis, (exercices **7** à **11**).

7. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $0{,}2x=7$. b) $12x=0$.

8. + Même énoncé qu'à l'exercice **7**.

a) $4x=6x+1$. b) $x=0{,}2x-1{,}6$.

9. + Même énoncé qu'à l'exercice **7**.

a) $2x+5=x-2+\dfrac{1}{2}x$. b) $\dfrac{3}{4}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$.

c) $(x-6)(x-1)=0$. d) $(3x+3)(-x+5)=0$.

CORRIGÉ P. 254

10. ++

1. Développer et réduire l'expression $P(x)=(2x-1)(x-1)(x+2)$.

Exercices

2. Déduire du **1.** la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2x^3+x^2-5x+2=0$.

CORRIGÉ P. 254

11. ++

a) Résoudre sur $]-\infty,-1[$ l'équation : $\dfrac{4x+1}{x+1}=0$.

b) Résoudre sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ l'équation : $\dfrac{5x+4}{2x+1}=3$.

Équations du second degré

12. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans utiliser les formules, l'équation du second degré suivante.

$(x+3)^2-16=0$.

Méthode : *factoriser le premier membre de l'équation à l'aide d'une identité remarquable (voir l'exercice **14**).*

CORRIGÉ P. 254

13. + Même énoncé qu'à l'exercice **12** avec :

$(x-3)(x-2)=(2x-1)(x-3)$.

14. ++ Sans utiliser les formules du cours, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $x^2-4x=0$.

b) $2x^2+3=0$.

c) $x^2-5=0$.

d) $(2x-5)^2-9=0$.

e) $-x^2+6x-9=0$.

Méthode : *pour résoudre les équations* c), d), e), *factoriser à l'aide d'une des identités remarquables :*

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

15. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations du second degré suivantes en utilisant les formules du cours. En déduire éventuellement une factorisation du polynôme correspondant.

a) $9x^2-6x+1=0$.

b) $x^2-0{,}36x-3{,}28=0$.

c) $x^2-7x+6=0$.

d) $-2x^2+5x-13=0$.

CORRIGÉ P.254

16. ++ En appliquant les formules du cours, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations d'inconnue x ou q, suivantes. Dans le cas de solutions s'écrivant à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$, donner la valeur approchée des résultats arrondie à 10^{-2}. En déduire éventuellement une factorisation du polynôme correspondant.

a) $6x^2+5x-4=0$.

b) $2x^2+3x-5=0$.

c) $4x^2+4x-1=0$.

d) $x^2+\dfrac{5}{2}x+1=0$.

e) $x^2+2x\sqrt{3}-1=0$.

f) $4q^2-3q+2=0$.

▶ **Conseil :** *on peut vérifier les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

17. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue q :

$20\,000q^2-1\,020\,000q+1\,000\,000=0$.

18. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$3x(x+1)+x^2-1=0$.

▶ **Remarque :** *développer ne conduit pas nécessairement au résultat par la méthode la plus rapide…*

19. ++ Résoudre dans $]-2,+\infty[$ l'équation d'inconnue x :

$\dfrac{3x^2+x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$.

20. +++ **Simplification**

1. Factoriser les polynômes h et g définis sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=10x^2-17x+3$ et $g(x)=5x^2+14x-3$.

2. Soit f la fonction définie sur $]3,+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{10x^2-17x+3}{5x^2+14x-3}$.

Déduire du **1.** une expression simplifiée de $f(x)$.

Étude de signes et résolution d'inéquations

21. ++ **Étudier le signe d'un trinôme du second degré**

Dans chacun des cas suivants, donner dans un tableau le signe du trinôme $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=3x^2-4x+5$.

b) $f(x)=-2x^2-x+15$.

c) $f(x)=2x^2+5x+\dfrac{25}{8}$.

Méthode : *Calculer le discriminant Δ.*
*En appliquant le théorème figurant au paragraphe **3C.** du cours, déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.*

CORRIGÉ P. 254

22. ++ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=-2x^2+3x+5$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

2. Donner dans un tableau le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x)\leq 0$.

CORRIGÉ P.254

23. ++ Même exercice que le **22** avec :

$f(x)=x^2-14x+33$.

24. ++ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=-4x^2+4x-1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=0$.

2. Déduire du **1.** la résolution de l'inéquation $g(x) \leq 0$.

> **Méthode :** *pour les exercices* **25** *et* **26***, faire une étude de signe en utilisant le théorème du paragraphe* **3C.** *du cours de ce chapitre. On pourra d'abord traiter avec profit l'exercice corrigé* **22**.

25. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

a) $(x-5)(x+7) \geq 0$. b) $-2x^2+5x-3 \leq 0$.

26. ++ Même énoncé qu'à l'exercice **25**.

a) $-9x^2+6x-1 \geq 0$. b) $x^2+2x+5 \leq 0$.

27. +++ **Système d'inéquations à une inconnue**

On donne le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} -x^2+9x+10 \geq 0 \\ -2x+15 \leq 0. \end{cases}$$

> ▶ **Rappel :** *les solutions de ce système sont, s'ils existent, les nombres qui appartiennent simultanément à chacun des ensembles de solutions des deux inéquations.*

Résoudre ce système.

28. +++ **Étude du signe d'une fonction rationnelle**

Soit f définie sur $]-5, 2[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2+3x-10}.$$

1. Étudier, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $]-5, 2[$.

> ▶ *Avec prise d'initiatives.*

2. Résoudre dans $]-5, 2[$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Faire le lien avec les représentations graphiques

29. +++ **Courbe représentative et équation du second degré** TICE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2-3x+4$.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	– 0,5	– 0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
$f(x)$	5,25	4,69	4	3,19	2,25	1,19	0	-2,75

2. Déterminer les nombres réels x, s'ils existent, dont l'image est 4. −3 et

2 et −5.

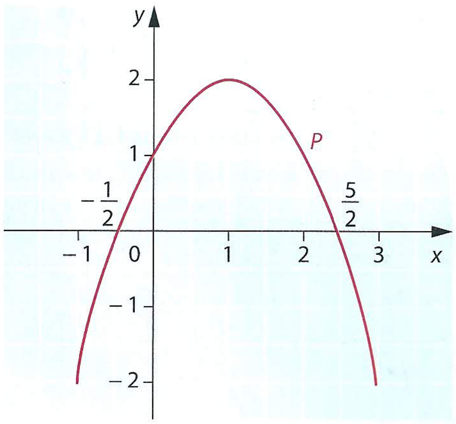
3. Même question qu'au **2.** en remplaçant 4 par – 6.

4. Faire apparaître sur l'écran de votre calculatrice la courbe représentative de f pour x appartenant à l'intervalle $[-4, -1]$.

CORRIGÉ P. 254

30. ++ **Lectures graphiques**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $[-1, 3]$ dont la courbe représentative P est donnée sur la figure ci-dessous. Pour tout x de $[-1, 3]$, $f(x)$ est de la forme : $f(x) = ax^2+bx+c$.



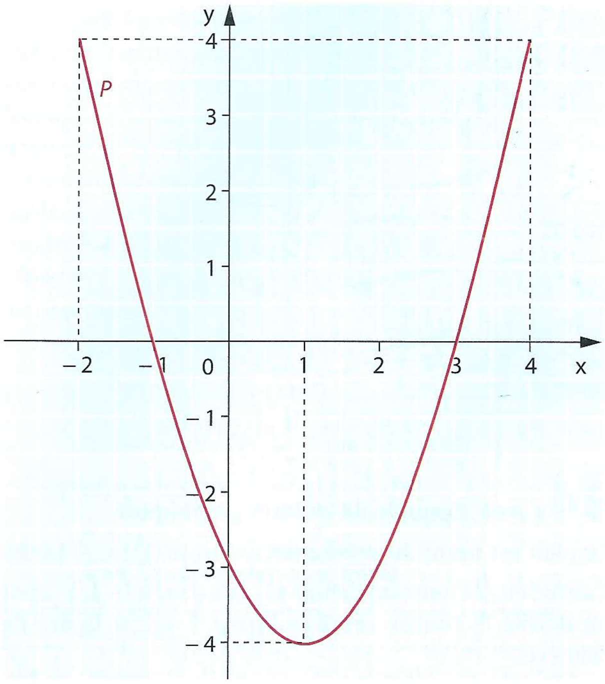
1. Lire sur le graphique les solutions de l'équation du second degré $f(x) = 0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-1, 3]$, l'inéquation $f(x) \leq 0$.

31. +++ **Lectures graphiques et résolution algébrique**

Soit f la fonction définie sur $[-2, 4]$ par $f(x) = x^2-2x-3$.

La courbe représentative P de f est donnée sur la figure suivante.



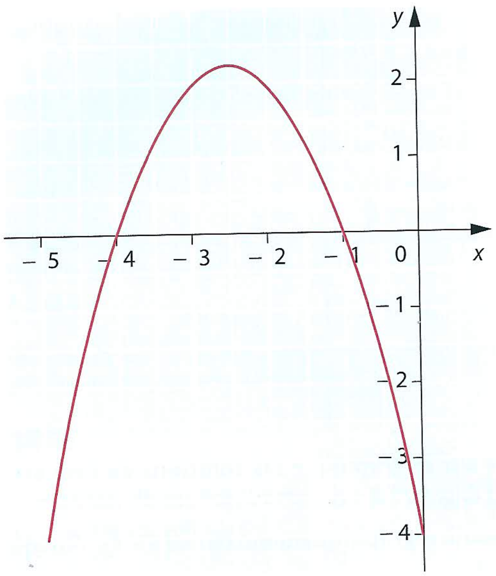
1. Déterminer graphiquement les solutions dans $[-2, 4]$ de l'équation $x^2-2x-3 = 0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-2, 4]$ l'inéquation $x^2-2x-3 \leq 0$.

3. Retrouver par le calcul les résultats des questions **1.** et **2.**.

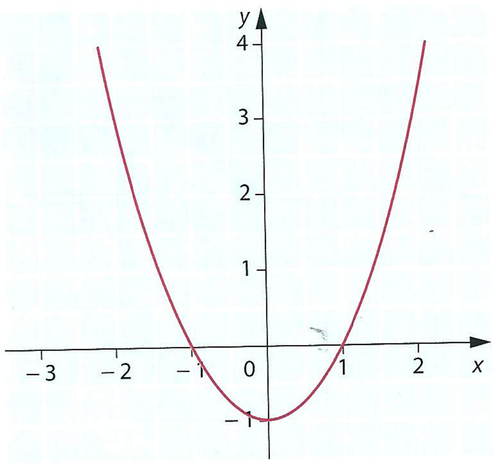
Exercices

32. +++ **1.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 5x - 4$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Utiliser le graphique pour donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.



2. Retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement au **1.**.

33. +++ Même exercice que le **32** avec $f(x) = x^2 - 1$ et la courbe représentative ci-dessous.



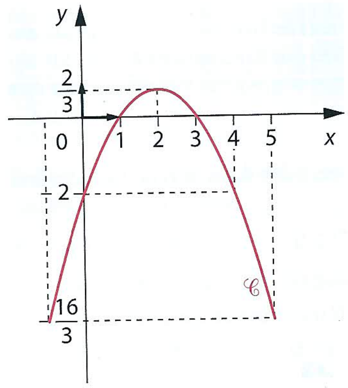
34. +++ **Exemple de lectures graphiques**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm). Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 5]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure de l'annexe.

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1, 5]$?

Annexe



3. Résoudre graphiquement dans $[-1, 5]$ les équations suivantes après avoir reproduit la figure :

a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -2$;

c) $f(x) = 1$; d) $f(x) = \frac{2}{3}$.

4. a) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre -1 et 5 le nombre $f(x)$ est positif.

b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1, 5]$.

5. Résoudre graphiquement dans $[-1, 5]$ l'inéquation $f(x) \geq -2$.

6. Donner le tableau de variation de f sur $[-1, 5]$.

Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum ?

7. On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ est un arc de parabole, c'est-à-dire que pour tout nombre réel x de $[-1, 5]$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

À l'aide de valeurs obtenues à la question **1.**, déterminer les nombres réels a, b, c.

> **Méthode :** *on peut, par exemple, déduire des égalités $f(0) = -2$, $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$ un système linéaire simple de trois équations à trois inconnues, qui se ramène immédiatement à un système linéaire de deux équations à deux inconnues.*

8. Retrouver par le calcul :

a) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

CORRIGÉ P. 254

Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème

35. ++ **On cherche un nombre entier**

Trouver un nombre entier naturel tel que si on ajoute 10 à son triple, on obtient son carré.

> **Méthode :** *mettre en équation consiste à désigner par n (ou x) le nombre cherché et à traduire la phrase de l'énoncé par une égalité donc une équation.*