Correction devoir surveillé de mathématiques n°1 :

Exercice 1 :

On reconnaît des fonctions du second degré sous forme canoniques, dans lesquelles on isolera a , α et β :

Fonction f : $a=-1$ donc parabole tournée vers le bas, $\alpha=-1$ et $\beta=-1$ donc sommet $S(-1\,;-1)$. Courbe C_3

Fonction g : $a=-2$ donc parabole tournée vers le bas, $\alpha=2$ et $\beta=3$ donc sommet en $(2\,;3)$. Courbe C_1

Fonction h : $a=1$ donc parabole tournée vers le haut, $\alpha=3$ et $\beta=-5$ donc sommet en $(3\,;-5)$. Courbe C_2

Fonction i : $a=2$ donc parabole tournée vers le haut, $\alpha=-1$ et $\beta=2$ donc sommet en $(-1\,;2)$. Courbe C_4

Exercice 2 :

1. On part de $-3(x-2)^2+4=-3(x^2-4x+4)+4=-3x^2+12x-12+4=-3x^2=12x-8=f(x)$ CQFD
2. f est une fonction du second degré. Avec la forme canonique trouvée en 1. on déduit que : $a=-3$ donc parabole tournée vers le bas, $\alpha=2$ et $\beta=4$ donc la parabole admet un sommet en $(2\,;4)$. La fonction f est donc croissante sur [-1 ; 2] puis décroissante sur [2;4]

x	-1	2	4
$f(x)=-3x^2+12x-8$	-23 ↗	4	↘ -8

Exercice 3 :

a. On reconnaît une équation du second degré nulle, avec les coefficients :
$a=-2\,;b=-4\,;c=-2$. On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}$ d'où
$\Delta=(-4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

L'équation admet une seule solution : $x=\dfrac{-b}{2\text{a}}=\dfrac{4}{-4}=-1$ finalement $S=\{\ -1\ \}$

b. On se ramène à une équation du type $ax^2+bx+c=0$: $x^2+3x+4=5\ \Leftrightarrow x^2+3x-1=0$
On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}$ d'où $\Delta=3^2-4\times1\times(-1)=9+4=13$
Comme le discriminant est positif, l'équation admet deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ D'où $S=\{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\,;\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\}$

Exercice 4 :

f est un polynôme du second degré. Pour le factoriser, on cherche si le polynôme admet des racines. On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}$ d'où $\Delta=(-14)^2-4\times(-5)\times3=196+60=256>0$
Le polynôme est donc factorisable. Il admet deux racines :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\dfrac{-(-14)+\sqrt{256}}{2\times(-5)}=-\dfrac{30}{10}=-3$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\dfrac{-(-14)-\sqrt{256}}{2\times(-5)}=-\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}=0{,}2$

et son expression factorisée est sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ ce qui donne ici
$f(x)=-5(x+3)(x-\dfrac{1}{5})$

Exercice 5 :

g est un polynôme du second degré. Pour étudier son signe, on cherche si le polynôme admet des racines et on calcule son discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}$ d'où
$\Delta=(-24)^2-4\times(-1)\times(-156)=576-624=-48<0$
Comme le discriminant est négatif, g est toujours du signe de a, donc ici négatif.
Au final, sur $I=[-10;10]$, la fonction g est toujours négative.

Exercice 6 :

On commence par déterminer séparément les signes du numérateur et du dénominateur :

- $-1,5x^2-1,5x+18$ est un polynôme du second degré. Pour étudier son signe, on cherche si le polynôme admet des racines et on calcule son discriminant : $\Delta=b^2-4\text{ac}$
  d'où $\Delta=(-1,5)^2-4\times(-1,5)\times(18)=\frac{441}{4}>0$
  Il admet deux racines :
  $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\frac{-(-1,5)+\sqrt{\frac{441}{4}}}{2\times(-1,5)}=-\frac{1,5+\frac{21}{2}}{3}=-4$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\text{a}}=\frac{-(-1,5)-\sqrt{\frac{441}{4}}}{2\times(-1,5)}=-\frac{1,5-\frac{21}{2}}{3}=3$
  ce polynôme sera du signe de a, donc négatif à l'extérieur des racines, et donc positif sur]-4;3[
- $4x-1$ est un polynôme du 1[er] degré de la forme $ax+b$. Il s'annule en $\frac{-b}{a}=\frac{1}{4}$. Il est du signe de a, donc positif, à droite de la racine, donc sur $]\frac{1}{4};+\infty[$

x	$-\infty$		-4		1/4		3		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	+		+	
$-1,5x^2-1,5x+1$		$-$	0	+		+		$-$	
$f(x)$		+	0	-	||	+	0	-	

$S=]-\infty;-4[\cup]\frac{1}{4};3[$

Exercice 7 :

traité en classe.