Plan de travail : Second degré : équations, factorisation et études de signes

1. Résoudre une équation du second degré :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $7x^2-4x+3=2$

On essaie de mettre l'équation de départ sous la forme $ax^2+bx+c=0$

$7x^2-4x+3=2$

$7x^2-4x+1=0$

On a bien maintenant une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$

avec $a=7\,;b=-4\,;c=1$

On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times7\times3=16-84=-68$

Comme $\Delta<0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x(x+1)+2x^2-3=0$

On essaie de mettre l'équation de départ sous la forme $ax^2+bx+c=0$

$3x(x+1)+2x^2-3=0$

$3x^2+3x+2x^2-3=0$

$5x^2+3x-3=0$

On a bien maintenant une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$

avec $a=5\,;b=3\,;c=-3$

On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times5\times(-3)=9+60=69$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{2\times5}$ et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{69}}{2\times5}$

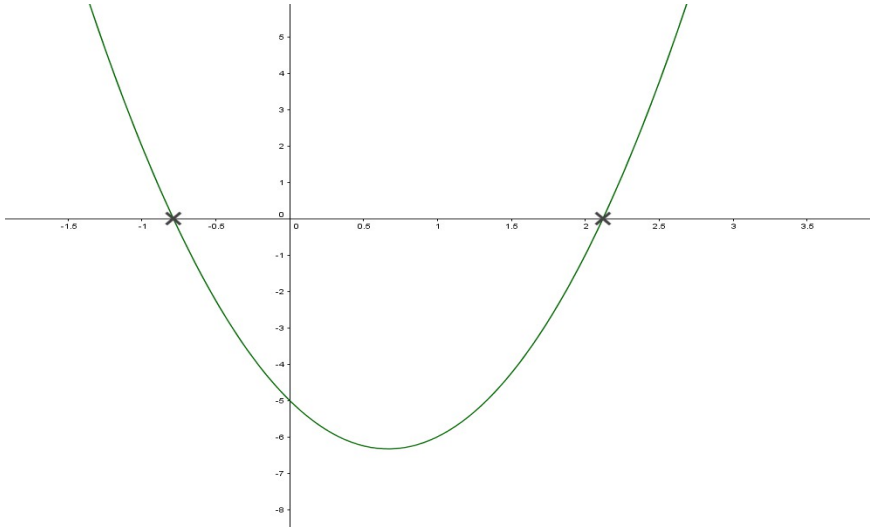
$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}$ et $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{69}}{10}$

$S=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{69}}{10}\,;\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}\right\}$

2. Équations du second degré et fonctions :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-4x-5$. Existe-t-il des points de la parabole représentant la fonction f qui appartiennent aussi à l'axe des abscisses ? Si oui, quelles sont leurs coordonnées ?

Si des points d'abscisse x de la parabole appartiennent aussi à l'axe des abscisses, ils ont une ordonnée nulle (car sur l'axe des abscisses) et une ordonnée qui vérifie $f(x)=3x^2-4x-5$.



On résout donc $f(x)=3x^2-4x-5=0$

On reconnaît une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$

avec $a=3\,;b=-4\,;c=-5$

On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times(-5)=16+60=76$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{76}}{2\times3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{76}}{2\times3}$$

$$x_1=\frac{4+\sqrt{76}}{6} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+\sqrt{76}}{6}$$

$$S=\left\{\frac{2-\sqrt{19}}{3}\,;\frac{2+\sqrt{19}}{3}\right\}$$

3. Factoriser une expression du second degré

1. Donner si possible une expression factorisée de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2-x+15$

Pour savoir si une expression du second degré est factorisable, on calcule son discriminant

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-2)\times(15)=1+120=121$

Comme $\Delta>0$, la fonction f est factorisable. On calcule les racines :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{121}}{2\times(-2)} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{121}}{2\times(-2)}$$

$$x_1=\frac{1+11}{-4}=-3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{1-11}{-4}=\frac{-10}{-4}=\frac{5}{2}$$

On sait alors que $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-2(x-(-3))(x-\frac{5}{2})=-2(x+3)(x-\frac{5}{2})$

2. Donner si possible une expression factorisée de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+5x+\frac{25}{8}$

Pour savoir si une expression du second degré est factorisable, on calcule son discriminant

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(2)\times(\frac{25}{8})=25-25=0$

Comme $\Delta=0$, la fonction f est factorisable. On calcule la racine double :

$x_0=\frac{-b}{2a}=-\frac{5}{4}$

On sait alors que $f(x)=a(x-x_0)^2=2(x-\frac{-5}{4})^2=2(x+\frac{5}{4})^2$