Plan de Travail : Second degré

1 Rappels calculs algébriques

▷ **Exercice 1:**
Développer les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
A(x) &= (3x-2)^2\\
&= 9x^2-12x+4\\
B(x) &= 7(2-x)^2\\
&= 7(4-4x+x^2)\\
&= 7x^2-28x+28\\
C(x) &= -2(1-x)^2+3\\
&= -2(1-2x+x^2)+3\\
&= -2+4x-2x^2+3\\
&= -2x^2+4x+1\\
D &= -3(2-x)(2x+7)\\
&= -2(-2x^2-3x+14)\\
&= 4x^2+6x-28
\end{aligned}$$

▷ **Exercice 2:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$
par $f(x) = 3x^2-5x+2$

1. Sous quelle forme est proposée f ? f est proposée sous forme développée
2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 3\times(0)^2-5\times 0+2\\
f(0) &= 2\\
f(2) &= 3\times(2)^2-5\times 2+2\\
f(2) &= 3\times 4-10+2\\
f(2) &= 4
\end{aligned}$$

3. Déterminer l'image de -1 par f

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 3\times(-1)^2-5\times(-1)+2\\
f(-1) &= 3\times 1+5+2\\
f(-1) &= 10
\end{aligned}$$

4. Résoudre $f(x) = 2$ Il faut résoudre

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\\
3x^2-5x+2 &= 2\\
3x^2-5x &= 0\\
x(3x-5) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul
$x = 0$ ou $3x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 0 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$

▷ **Exercice 3:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5(3-x)^2 + 1$

1. Sous quelle forme est proposée f ? f est proposée sous forme canonique, sous la forme : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
2. Calculer $f(0)$ et $f(3)$

$$\begin{aligned} &f(0) = 5(3-0)^2 + 1 \\ &f(0) = 46 \\ &f(3) = 5(3-3)^2 + 1 \\ &f(3) = 1 \end{aligned}$$

3. Résoudre $f(x) = 1$ Il faut résoudre

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ 5(3-x)^2 + 1 &= 1 \\ 5(3-x)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3 - x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $S = \{3\}$

4. Écrire la forme développée de f

$$\begin{aligned} f(x) &= 5(3-x)^2 + 1 \\ &= 5(9 - 6x + x^2) + 1 \\ &= 5x^2 - 30x + 46 \end{aligned}$$

$CQFD$

▷ **Exercice 4:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$
Vérifier que pour tout nombre réel x, on a
$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$
On part de :

$$\begin{aligned}2\big(x-\frac{1}{4}\big)^2+\frac{7}{8} &= 2\big(x^2-\frac{1}{2}\times x+\frac{1}{16}\big)+\frac{7}{8}\\ &= 2x^2-1\times x+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\\ &= 2x^2-1\times x+1\\ &= f(x)\\ CQFD\end{aligned}$$

CQFD

▷ **Exercice 5:**
Associer en expliquant, chaque polynôme à sa forme canonique :

$A(x) =$ $2x^2+12x+19$ $a=2>0$ donc parabole tournée vers le haut
$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{4}=-3$ donc $A(x)=1+2\big(x+3\big)^2$

$B(x) =$ $2x^2+6x+8$ On reconnaît une fonction du second degré sous forme développée
$a=2>0$ donc parabole tournée vers le haut
$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$ donc $B(x)=2\big(x+\dfrac{3}{2}\big)^2+\dfrac{7}{2}$

$C(x) =$ $-x^2-10x-45$ On reconnaît une fonction du second degré sous forme développée
$a=-1<0$ donc parabole tournée vers le bas
$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-10}{-1}=-10$ donc $C(x)=-x^2+10x-5$

2 Variations d'un polynôme du second degré

▷ **Exercice 6:**
Associer à chacune des polynômes ci-dessous sa représentation graphique :

$A(x) =$ x^2+4x+5
C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : ax^2+bx+c On a $a=1>0$ donc parabole tournée vers le bas. On calcule α, l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-2$ donc courbe 1

$B(x) =$ $-x^2+2x+2$
C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : ax^2+bx+c $a=-1<0$ donc parabole tournée vers le bas
On calcule $(\alpha;\beta)$= l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=1$
$\beta=f(\alpha)=f(1)=3$
donc le sommet de la parabole est en $(1;3)$, c'est donc la courbe 2

$C(x) =$ $4x^2-4x+1$
C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : ax^2+bx+c $a=4>0$ donc parabole tournée vers le haut
On calcule α, l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$ donc courbe 3

$D(x) =$ $-x^2-1$
C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : ax^2+bx+c $a=-1<0$ donc parabole tournée vers le bas
On calcule α, l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=0$ donc courbe 4

$E(x) = x^2 - 2x - 1$

C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : ax^2+bx+c $a = 1 > 0$ donc parabole tournée vers le haut

On calcule α, l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 1$ donc courbe 5

$F(x) = -x^2 + 2x - 1$

C' est une fonction du second degré proposée sous forme développée : $ax^2 + bx + c$ $a = -1 < 0$ donc parabole tournée vers le bas

On calcule α, l'abscisse du sommet de la parabole : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 1$ donc courbe 6