Plan de Travail : Second degré

1 Rappels calculs algébriques

▹ **Exercice 1:**
Développer les expressions suivantes

A(x)= $(3x-2)^2$ B(x)= $7(2-x)^2$ C(x)= $-2(1-x)^2+3$ D(x)= $-3(2-x)(2x+7)$

▹ **Exercice 2:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$
par $f(x)=3x^2-5x+2$

1. Sous quelle forme est proposée f ?
2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$
3. Déterminer l'image de -1 par f
4. Résoudre $f(x)=2$

▹ **Exercice 3:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5(3-x)^2+1$

1. Sous quelle forme est proposée f ?
2. Calculer $f(0)$ et $f(3)$
3. Résoudre $f(x)=1$
4. Écrire la forme développée de f

▹ **Exercice 4:**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-x+1$
Vérifier que pour tout nombre réel x, on a
$f(x)=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$

▹ **Exercice 5:**
Associer en expliquant, chaque polynôme à sa forme canonique :

$A(x)=\ 2x^2+12x+19$ $E(x)=\ 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

$B(x)=\ 2x^2+6x+8$ $F(x)=\ -\left(x-5\right)^2+20$

$C(x)=\ -x^2-10x-45$ $G(x)=\ -\left(x+5\right)^2-20$

$D(x)=\ -x^2+10x-5$ $H(x)=\ 1+2\left(x+3\right)^2$

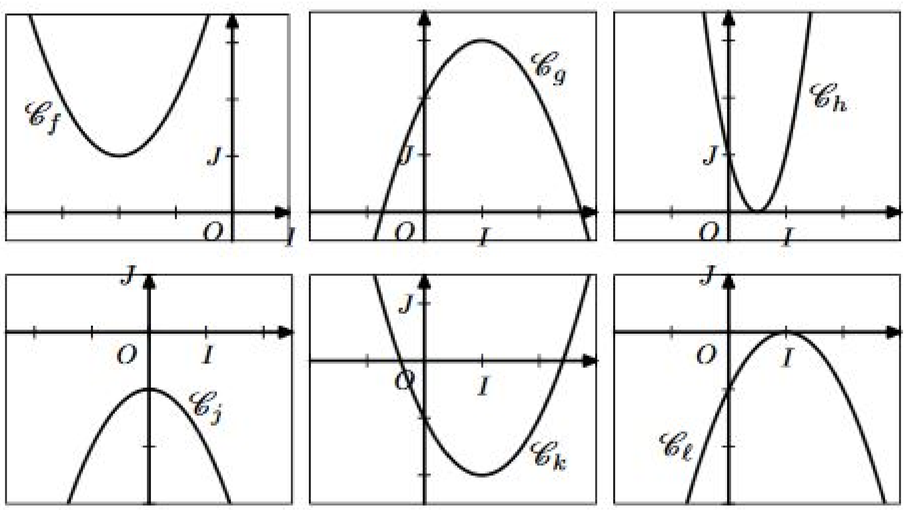
2 Variations d'un polynôme du second degré

▹ **Exercice 6:**
Associer à chacune des polynômes ci-dessous sa représentation graphique :

$A(x)=\ x^2+4x+5$ $D(x)=\ -x^2-1$

$B(x)=\ -x^2+2x+2$ $E(x)=\ x^2-2x-1$

$C(x)=\ 4x^2-4x+1$ $F(x)=\ -x^2+2x-1$



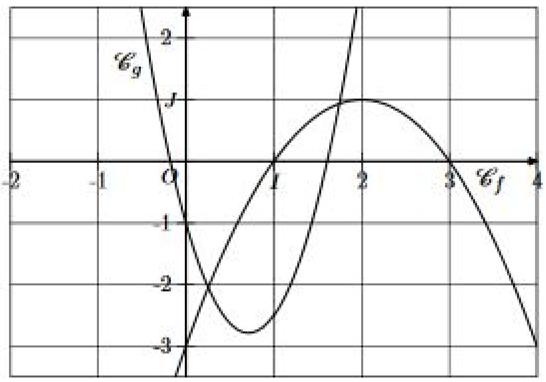
▷ **Exercice 7:**
Le bénéfice en euros d'une entreprise est modélisé en euros par la fonction f définie sur$[0;3]$ par $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ où x représente le nombre d'objets fabriqués, par centaines.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$
2. Vérifier que $f(x) = (-2x+1)(x-2)$
3. En exploitant la forme appropriée de $f(x)$ donner :
   (a) Les quantités d'objets fabriqués pour lesquels le bénéfice est nul
   (b) Le bénéfice maximal
   (c) Les quantités d'objets fabriqués sachant que l'entreprise a perdu 2000 €

▷ **Exercice 8:**

Dans le plan muni d'un repère, on considère les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g : Les questions ci-dessous doivent être traitées graphiquement :

1. Déterminer les antécédents de 1 par la fonction f
2. Lire $g(0)$
3. Lire les valeurs de α et β pour la fonction f
4. Déterminer une valeur pour laquelle g n'a pas d'antécédent
5. Déduire les signes du paramètre a pour chaque fonction mise sous la forme polynomiale.
6. Déterminer la position relative de ces deux courbes.



▷ **Exercice 9:**
Pour chacun de ces polynômes, déterminer son tableau de variations :

A(x)= $4x^2 - 5x + 3$ B(x)= $-2x^2 + 3x - 5$

▷ **Exercice 10:** Pour chacun de ces polynômes, déterminer son tableau de variations :

A(x)= $2(x-7)^2 + 3$ B(x)= $-5(x+3)^2 - 1$

3 Résolution d'équations du second degré

▷ **Exercice 11:**

Pour chacune de ces équations, calculer le discriminant et déterminer le nombre de solutions :

1. $3x^2 + 4x + 5 = 0$
2. $-x^2 - 3x + 2 = 0$
3. $-6x^2 + 4x - 1 = 0$
4. $-x^2 + 3x + 1 = 0$

▷ **Exercice 12:**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune de ces équations :

1. $x^2 - 8x + 10 = 0$
2. $3x^2 - x + 2 = 0$
3. $9x^2 - 6x + 1 = 0$
4. $-7x^2 + 3x - 1 = 0$

▷ **Exercice 13:**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune de ces équations :

1. $4x^2+1=4x$
2. $-3x^2+x=-\dfrac{1}{4}$
3. $3x^3-4x^2+5x=0$
4. $3(x-4)^2-5=0$
5. $(2x+3)(4-x)=2$
6. $4x^2-1=(2x+1)(x-3)$

▷ **Exercice 14:**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1,5x^2+18x+48$

1. Calculer $f(0)$
2. Résoudre $f(x)=0$
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses.

▷ **Exercice 15:**
Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(2x-3)(4x^2+3x-5)=0$

4 Déterminer le signe d'un trinôme du second degré

▷ **Exercice 16:**
Sans calcul, et en justifiant, donner le signe des fonctions trinômes suivantes, sur l'intervalle proposé :

1. $f(x)=2(x-1)^2+1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x)=2(x-1)^2+1$ sur $[2;5]$
3. $h(x)=3x^2+4x+5$ sur $[0;10]$

▷ **Exercice 17:**
Donner le tableau de signes des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=x^2+2x-3$
2. $g(x)=-3x+5$
3. $h(t)=2t^2-1,5t+0,25$
4. $i(x)=9x^2-3x-2$

▷ **Exercice 18:**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-21x+30$
Résoudre sur $[3;7]$ l'inéquation $f(x)\leqslant 0$

▷ **Exercice 19:**
Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle proposé :

1. $-4x^2+x+\dfrac{1}{2}\leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $2t^2-9t+4<0$ sur $[3;5]$
3. $h(x)=3x^2+4x+5$ sur $[0;10]$

▷ **Exercice 20:**
Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle proposé :

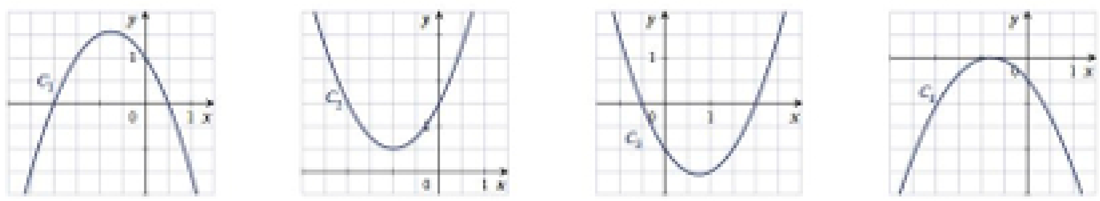
1. $-4x^2+x+\dfrac{1}{2}\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $2t^2-9t+4<0$ sur $[3;5]$
3. $h(x)=3x^2+4x+5$ sur $[0;10]$

▷ **Exercice 21:**
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $-4,5x^2-27x>36$
2. $(5x-3)(x^2+3,8x-0,8)>0$
3. $(-5x^2-11x-2)(-x^2-x-1)\leqslant 0$
4. $\dfrac{2x-3}{-2x^2+9x-4}\geqslant 0$

5 Résolutions graphiques

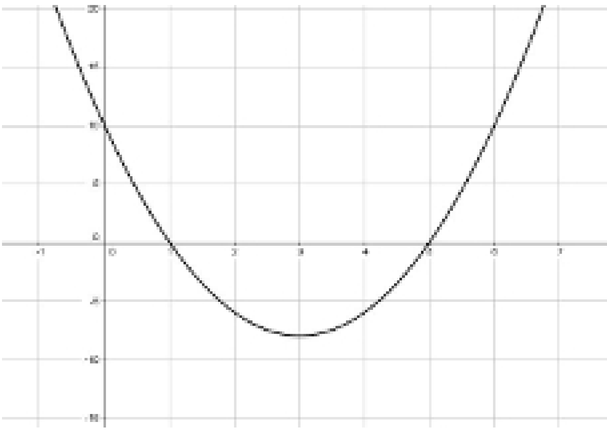
▷ **Exercice 22:**
On a représenté ci-dessous quatre fonctions polynômes du second degré de la forme $P(x)=ax^2+bx+c$.
Pour chacune d'elles, donner le signe du discriminant.



▷ **Exercice 23:**
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. telle que le maximum de la fonction f soit égal à 0. Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont exactes ?

1. $a > 0$ et $\Delta < 0$.
2. $a < 0$ et $\Delta = 0$.
3. $a < 0$ et $\Delta < 0$.
4. La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.
5. L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.

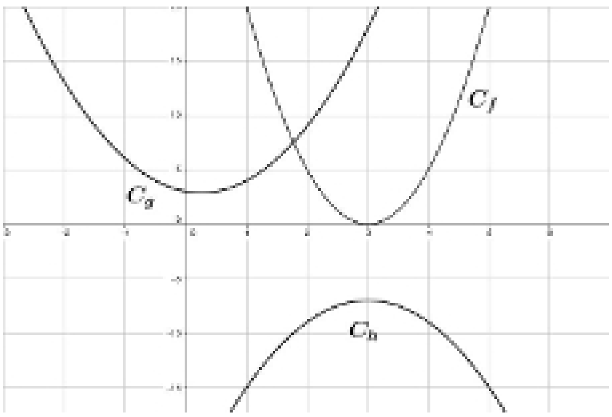
▷ **Exercice 24:**
On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Répondre à partir d'une lecture graphique :



1. Quel est le signe de a
2. Quel est le signe du discriminant ?
3. Résoudre $f(x) < 0$

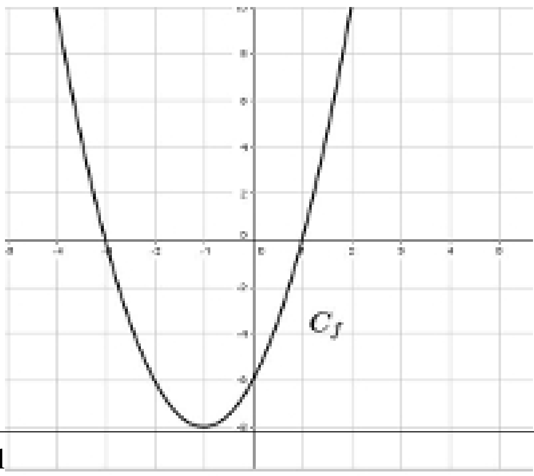
▷ **Exercice 25:**

On a représenté ci-dessous trois fonctions polynômes du second degré Pour chacune d'elles, donner le signe du discriminant.



▷ **Exercice 26:**

On a représenté ci-dessous une fonction f polynôme du second degré.



1. Déterminer le tableau de signes de f
2. Résoudre $f(x) > 1$
3. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

6 Résolutions de problèmes

▷ **Exercice 27:**

Une entreprise fabrique des maracas pour enfants. Pour une quantité p, exprimée en centaine de maracas, le coût total, exprimé en milliers d'euros est :

$$C(q) = 0.2q^2 - 0.4q + 1.2 \text{ pour } q \text{ appartenant à } [1;7]$$

La recette en milliers d'euros est alors $R(q) = q$

1. Calculer le coût et ma recette pour la fabrication et la vente de 250 maracas.
2. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ?
3. Exprimer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q
4. Montrer que $B(q) = -0,2(q-3.5)^2 + 1.25$
5. Montrer que $B(q) = -0,2(q-1)(q-6)$
6. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Déterminer le bénéfice Maximum
   (b) Déterminer les points morts de la production c'est à dire les quantités à produire et à vendre pour que le bénéfice soit nul.

▷ **Exercice 28:**

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $[0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

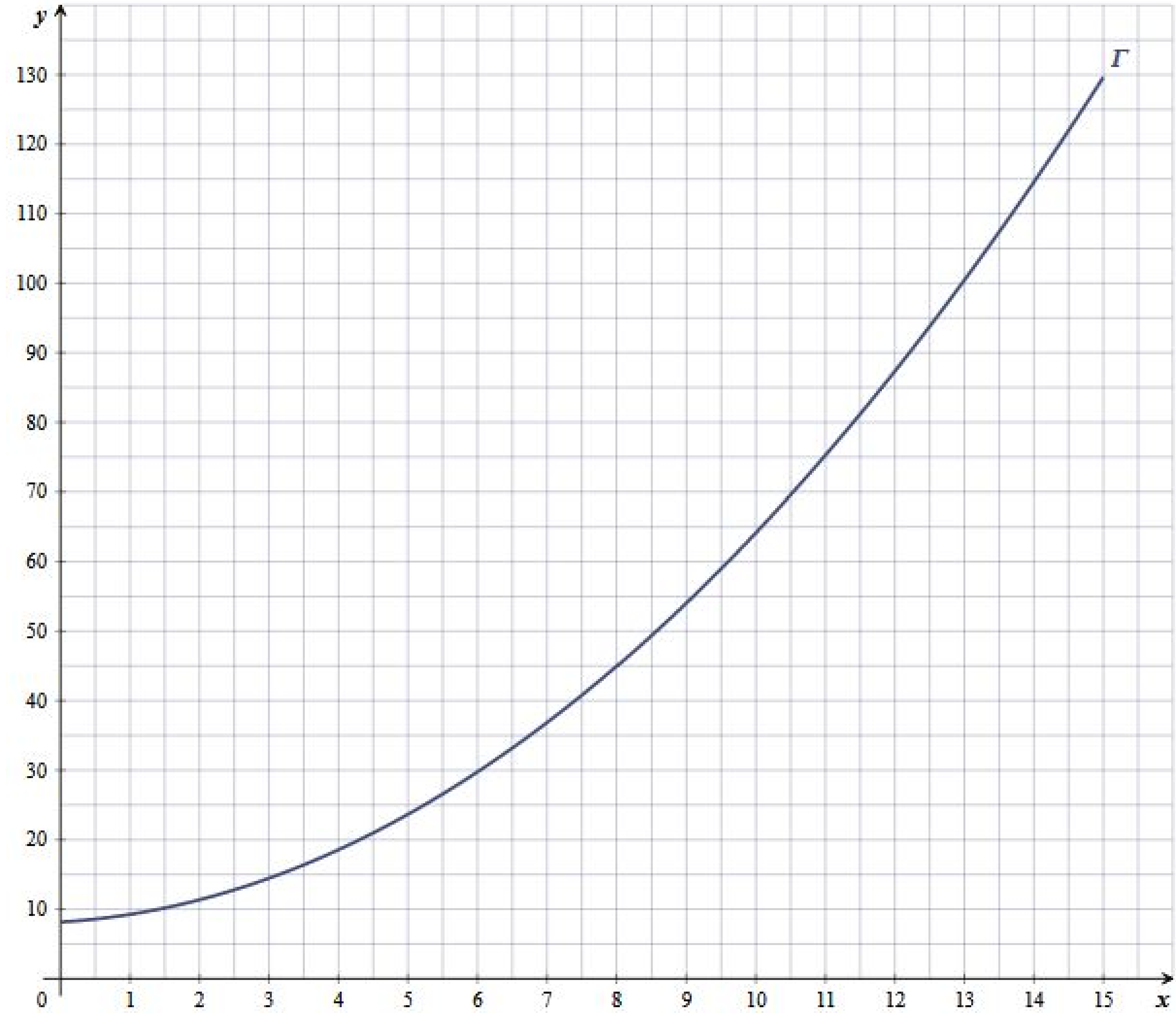
1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 00 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». Donner l'expression algébrique de $R(x)$
3. Tracer dans le repère donné en annexe, la courbe D représentative de la fonction recette.
4. Par lecture graphique et avec la précision permise par le dessin, déterminer :
   (a) L'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   (b) La production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

   On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.
5. Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par

   $$B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16, \text{ avec } x \in [0;15].$$

   (a) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   (b) Étudier les variations de la fonction B sur $[0;15]$.
   (c) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal.
   (d) Quel est le montant en euros, de ce bénéfice maximal ?

ANNEXE


y
x
Γ
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130