Correction DS 1 formatif. (Devoir et correction de M. Duffaud)

Exercice 1. Équation et inéquation — $2 + 4 = 6$ points

1. On se place dans un repère orthonormé du plan.
Les abscisses des éventuels points d'intersection de l'axe des abscisse et de la courbe représentative de la fonction f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & -2 \\ b = & 3 \\ c = & 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 17 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-4}$$

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont nulles donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\,;\,0\right)\ ;\ B\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\,;\,0\right) \right\}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : (I_1) : $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{-4x + 3} \geq 0$.

- **Valeurs interdites.** Il faut que le dénominateur soit non nul donc que :

$$-4x + 3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{4}$$

- **Étude de signe du dénominateur.**
On a directement :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $-4x + 3$		$+$	0	$-$	

- **Étude de signe du numérateur.** Le numérateur est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & 6 \\ b = & -5 \\ c = & 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}$$

Donc $6x^2 - 5x + 1$ est positif (signe de $a = 6$) à l'extérieur des racines et négatif sur $[x_1\ ;\ x_2]$.

- **Bilan.**

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $-4x + 3$		$+$		$+$		$+$	||	$-$	
signe de $6x^2 - 5x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
signe de $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{-4x + 3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right[}$$

Exercice 2. Bénéfice — $2.5 + 1.5 = 4$ points

1. **Résoudre l'inéquation : $(I_2) \quad : \quad -2x^2 + 60x - 250 \geq 0$.**

Le trinôme $-2x^2 + 60x - 250$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & -2 \\ b = & 60 \\ c = & -250 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1\,600 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-60 - \sqrt{1\,600}}{-4} = 25 \text{ et } x_2 = \frac{-60 + \sqrt{1\,600}}{-4} = 5$$

Donc $-2x^2 + 60x - 250$ est négatif (signe de $a = -2$) à l'extérieur des racines et positif sur $[5\ ;\ 25]$. De ce fait :

$$\boxed{\mathscr{S} = [5\,;\,25]}$$

2. **Le bénéfice total de fabrication de x milliers de smartphones, exprimé en milliers d'euros (k€), est donné par : $B(x) = 60x - 2x^2$. En utilisant la question 1., déterminer la production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros.**

Le problème revient à résoudre l'inéquation :

$$B(x) = 60x - 2x^2 \geq 250 \iff -2x^2 + 60x - 250 \geq 0 \iff x \in [5\,;\,25]$$

La production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros est donc comprise entre 5 000 et 25 000 smartphones.

Exercice 3. Étude complète **10 points**

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. **[1.5 point] Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.**
f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & 2 \\ c = & -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 16 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$\boxed{x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1}$$

2. **[1 point] En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.**
On a donc :

$$\boxed{f(x) = (x-1)(x+3)}$$

3. **[1 point] Dresser le tableau de signe de $f(x)$.**
f est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines soit :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $f(x) = x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. **[1 point] En utilisant la question précédente, donner directement les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.**
On a alors directement :

$$\boxed{f(x) < 0 \iff x \in]-3\,;\,1[}$$

5. **[1 point] Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.** On a $a > 0$ donc f est décroissante puis croissante avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -1$:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
g	↘	0	$g(-1) = -4$	0	↗

6. **[2 points] Sur le graphique de l'annexe, on a tracé la courbe représentative de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par**

$$g(x) = 4 - x^2$$

Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f sur ce même repère (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).

7. **[2.5 points] Déterminer graphiquement puis par le calcul, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.**
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection A et B des courbes représentatives de f et g.

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + 2x - 3 = 4 - x^2 \iff 2x^2 + 2x - 7 = 0$$

$2x^2 + 2x - 7 = 0$ est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & 2 \\ b = & 2 \\ c = & -7 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 60 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$\boxed{x_1 = \frac{-2-\sqrt{60}}{4} \approx -2.44 \text{ et } x_2 = \frac{-2+\sqrt{60}}{4} = 1.44}$$

On retrouve bien cela sur le graphique.

- Fin du devoir -

Graphique de l'exercice 3