Correction devoir surveillé n°4

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-x+1$

1. Le nombre -1 est racine de cette fonction si $f(-1)=0$

Pour le savoir, on calcule $f(x)=2(-1)^2-(-1)+1=2+1+1=4$ -1 n'est donc pas racine de cette fonction.

2. Vérifier que pour tout nombre réel x, on a $f(x)=2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}$

On part de $2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}=2(x^2-2\times x\times\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2)+\frac{7}{8}=2x^2-x+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=2x^2-x+1=f(x)$

3. Donner, en justifiant, le tableau de variations de f

$f(x)=2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}$ On reconnaît la forme canonique d'une fonction du second degré.

On lit $a=2>0$ donc la parabole est « tournée » vers le haut

On lit $\alpha=\frac{1}{4}$ (abscisse du sommet de la parabole) et $\beta=\frac{7}{8}$ (ordonnée du sommet de la parabole)

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 :

On cherche les valeurs qui annulent h :

$x-2=0$ $\qquad$ $1-3x=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=\frac{1}{3}$

$x-2$ est une expression du premier degré, de la forme $ax+b$, du signe de $a=1>0$ à « droite » de sa racine qui vaut 2.

$1-3x$ est une expression du premier degré, de la forme $ax+b$, du signe de $a=-3<0$ à « droite » de sa racine qui vaut $\frac{1}{3}$.

-3 est un facteur négatif dont le signe ne dépend pas de la valeur de x

	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$x-2$		-	|	-	0	-	
$1-3x$		+	0	-	|	-	
-3		-	|	-	|	-	
$h(x)$		+	0	-	0	-	

Exercice 3 :

- $3x+2=4-x$

On reconnaît une équation du premier degré à résoudre comme au collège :

$3x+2=4-x$

$3x+x=4-2$

$4x=2$ $\qquad$ $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $S=\{\frac{1}{2}\}$

- $(4x-3)(1+x)+(1+x)(x-8)=0$

On essaie de factoriser pour arriver à une équation produit-nul :
$(1+x)[(4x-3)+(1+x)]=0$
$(1+x)(5x-11)=0$
Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul
Soit $1+x=0$ soit $5x-11=0$
soit $x=-1$ soit $x=\frac{11}{5}$ $S=\{-1;\frac{11}{5}\}$

- $9x^2-6x+1=0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $9x^2-6x+1=0$
On a une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$
avec $a=9;b=-6;c=1$
On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times9\times1=36-36=0$
Comme $\Delta=0$, l'équation admet une solution :
$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2\times9}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ $S=\{\frac{1}{3}\}$

- $7x^2-4x+3=5$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $7x^2-4x+3=5$
On essaie de mettre l'équation de départ sous la forme $ax^2+bx+c=0$
$7x^2-4x+3=5$
$7x^2-4x-2=0$
On a bien maintenant une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$
avec $a=7;b=-4;c=-2$
On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times7\times(-2)=16+56=72$
Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où $x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{72}}{2\times7}$ et $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{72}}{2\times7}$
$x_1=\frac{4+6\sqrt{2}}{14}$ et $x_1=\frac{4-6\sqrt{2}}{14}$ $S=\{\frac{2-3\sqrt{2}}{7};\frac{2+3\sqrt{2}}{7}\}$

Exercice 4 :
Pour savoir si une expression du second degré est factorisable, on calcule son discriminant
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-2)\times(15)=1+120=121$
Comme $\Delta>0$, la fonction f est factorisable. On calcule les racines :
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{121}}{2\times(-2)}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{121}}{2\times(-2)}$
$x_1=\frac{1+11}{-4}=-3$ et $x_2=\frac{1-11}{-4}=\frac{-10}{-4}=\frac{5}{2}$
On sait alors que $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-2(x-(-3))(x-\frac{5}{2})=-2(x+3)(x-\frac{5}{2})$

Exercice 5 :
On observe que la parabole coupe l'axe des abscisses deux fois, en -2 et en +4.
Cela signifie que le discriminant de la fonction du second degré qui lui est associé est positif et que cette fonction admet deux racines -2 et 4.