

Systèmes de deux équations à deux inconnues

1. Tester des valeurs dans un système d'équations (vidéo 1)

À connaître :

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système** de deux équations du premier degré à deux inconnues désignées par les lettres x et y . Un couple de nombres (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2 ; -3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = 2$ et $y = -3$:

$$5x + 2y = 5 \times 2 + 2 \times (-3) = 10 - 6 = 4 \text{ et } -2x + y = -2 \times 2 + (-3) = -7.$$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x=2$ et $y=-3$ donc le couple $(2 ; -3)$ est solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

« À toi de jouer » :

Les couples $(-5 ; 1,5)$ et $(1 ; 9,5)$ sont-ils solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = -24,5 \\ 3x + 7y = -4,5 \end{cases}$?

2. Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

- **Détermination d'une des inconnues**

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} 5 \times (5x - 4y) = 5 \times 8 \\ 4 \times (2x + 5y) = 4 \times 1 \end{cases}$	→	On multiplie les deux membres de la première équation par 5 et ceux de la seconde par 4.
$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$	→	On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.
$25x + 8x = 40 + 4$	→	On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y
$33x = 44$		
$x = \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}$	→	On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x .

- **Détermination de l'autre inconnue**

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ 5 \times (2x + 5y) = 5 \times 1 \end{cases}$	→	On multiplie les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 5.
$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$	→	On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.
$-8y - 25y = 16 - 5$	→	On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .
$-33y = 11$		
$y = \frac{11}{-33} = -\frac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\frac{1}{3}$	→	On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y .

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la

méthode 1.

On en déduit que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y , on pouvait aussi remplacer x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

« À toi de jouer »

1 Résous par combinaisons le système :

$$\begin{cases} 3x - 7y = 29 \\ 4x - 5y = -33 \end{cases}$$

2 Résous par la méthode de ton choix le système :

$$\begin{cases} -2x + 3y = 3,5 \\ x - 4y = -5,5 \end{cases}$$

4. Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €. Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

Étape n°2 : Mettre le problème en équation

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x et de y .

205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.

La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4,50y = 1\,222,50$.

L'énoncé se traduit donc par le système $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases}$.

Étape n°3 : Résoudre le système

On peut résoudre le système par substitution.

$x = 205 - y$ On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.

$7(205 - y) + 4,50y = 1\,222,50$ On remplace (substitue) x par $205 - y$ dans la deuxième équation.

$$1\,435 - 7y + 4,50y = 1\,222,50$$

$$-2,50y = -212,50$$

$$y = 85$$

On remplace y par 85 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x .

On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y .

$$x = 205 - 85$$

$$x = 120$$

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème

On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système.

$$\text{Donc, si } \begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}.$$

On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

« À toi de jouer »

Dans une boulangerie, Paul a acheté quatre croissants et trois pains au chocolat pour 5,65 €. Lina a acheté, dans cette même boulangerie, trois croissants et cinq pains au chocolat pour 6,85 €. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.