<u>**Probabilités :**</u>

1 Définitions et vocabulaire :

1.1 <u>Expérience aléatoire.</u>

On appelle **expérience aléatoire** une expérience :

- renouvelable
- ayant des résultats que l'on est capable de décrire,
- mais dont on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on la réalise.

<u>Exemples classiques :</u>

Le lancer d'un dé non pipé (non truqué), tirer une carte au hasard dans un jeu, tirer une boule dans une urne (comme au loto) sont des expériences aléatoires.

On connaît les résultats possibles mais on ne sait pas lequel va se produire avant l'expérience réalisée.

1.2 <u>Issues, Univers et événements</u>

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelées <u>**issues**</u>

L'ensemble des éventualités est appelé **univers**; on le note souvent Ω

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire une partie de l'univers.

Exemple :

<u>Expérience aléatoire</u> : On lance un dé à 6 faces.

Les <u>issues</u> de cette expérience sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

<u>L'univers</u> de cette expérience aléatoire est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

- « obtenir un 6 » est un <u>événement</u> ;

  Comme il ne contient qu'une seule issue on dit que c'est un <u>événement élémentaire.</u>
- « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair » sont des <u>événements contraires</u> car ils n'ont aucune issue en commun et couvrent tout l'univers.
- « Obtenir un 8 » est un <u>événement impossible</u>
- « Obtenir un entier inférieur à 8 » est un <u>événement certain</u>

On note $\overline{A}=non\,A$ ce sont tous les éléments qui n'appartiennent pas à A

$A\cap B=A\,et\,B$ ce sont tous les éléments qui appartiennent à A et à B

$A\cup B=A\,ou\,B$ ce sont tous les éléments qui appartiennent à A ou à B

2. Probabilité d'un événement :

2.1. Définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité.

2.2. Calcul d'une probabilité :

Pour calculer la probabilité d'un événement A, on peut appliquer la formule suivante :

$$P(A)=\frac{nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ A}{nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience}$$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On appelle A l'événement « *obtenir le 8 de cœur* » et B l'événement « *obtenir un as* »

$nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ A=1$ (1 seul 8 de cœur)

$nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience=32$ (il y a 32 cartes)

donc $P(A)=\frac{nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ A}{nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience}=\frac{1}{32}$

de même $P(B)=\frac{nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ B}{nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

2.3. Propriétés

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1

  exemple : Dans l'exemple précédent, $P(B)=\frac{1}{8}=0{,}125$

- La probabilité de l'événement impossible est 0

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  Soit C l'événement : « obtenir un 7 » $P(C)=\frac{0}{6}=0$

- La probabilité de l'événement certain est 1.

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  Soit D l'événement : « obtenir un nombre inférieur à 7 » $P(D)=\frac{6}{6}=1$

- **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.**

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  $P(obtenir\ 1)+P(obtenir\ 2)+P(obtenir\ 3)+P(obtenir\ 4)+P(obtenir\ 5)+P(obtenir\ 6)=\frac{6}{6}=1$

- Plus la probabilité d'un événement est proche de 1, plus l'événement a des « chances » de se réaliser

- **La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent** exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Soit E l'événement : « obtenir un 3 ou un 4» $P(E)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Soit F l'événement : « obtenir un 3» c'est un événement élémentaire

Soit G l'événement : « obtenir un 4» c'est un événement élémentaire

$P(F)+P(G)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ donc $P(F)+P(G)=P(E)$

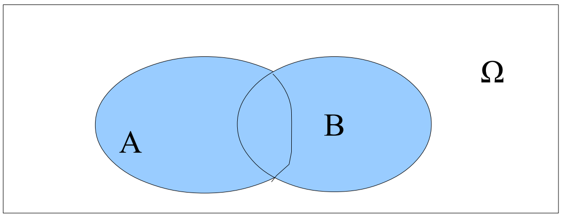
- Lorsque chaque événement a la même probabilité de se réaliser, on dit que les événements sont <u>équiprobables</u>
  exemple : Il y a autant de chances de tirer un 1 , un 2 , … ou un 6 avec un dé non pipé. On dit que ce sont des événements équiprobables.
- **Soit A un événement. On a alors :** $P(\overline{A})=1-P(A)$

exemple : On lance un dé à 6 faces. On appelle l'événement $H=\{obtenir\, un\, 6\}$

on a alors $\overline{H}=\{ne\ pas\, obtenir\, un\, 6\}$

Donc $P(\overline{H})=1-P(H)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

2.4. Relations entre $P(A\cap B)$ et $P(A\cup B)$



$$P(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On appelle A : « tirer un cœur »

et B : « tirer un As »

$P(A)=\frac{8}{32}$ et $P(B)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$A\cup B$ est l'événement avoir un cœur ou un as. Donc $P(A\cup B)=\frac{11}{32}$ (8 cœurs possibles et 3 as)

$A\cap B$ est l'événement avoir un cœur et un as. Donc $P(A\cap B)=\frac{1}{32}$ (seulement as de cœur)

On vérifie bien que :

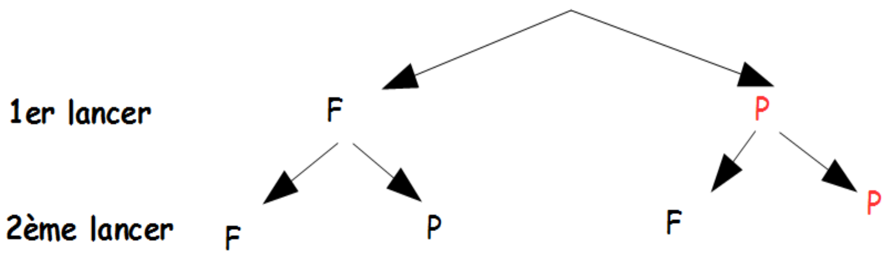
$P(A\cup B)=\frac{11}{32}$ et = $p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{8}{32}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{8+4-1}{32}=\frac{11}{32}$

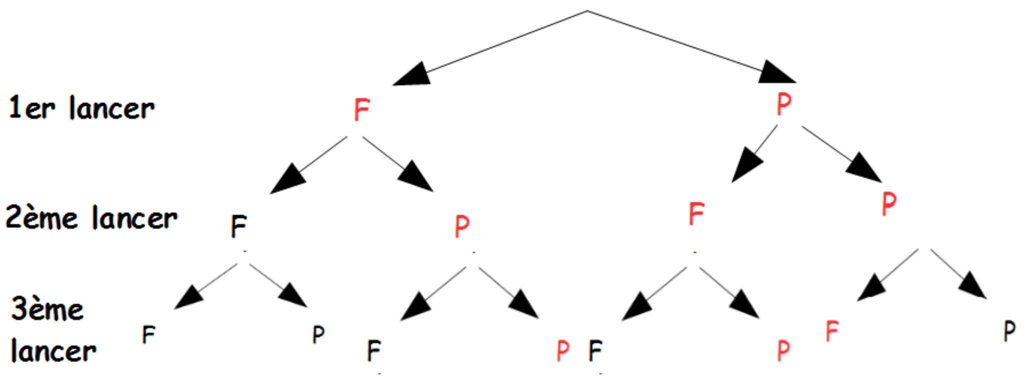
- Expériences successives

  Exemple : On lance une pièce de monnaie plusieurs fois et on relève Pile ou Face à chaque tirage

  1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois Pile en deux tirages ?
  2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile en trois tirages ?

Stratégie : on construit un arbre des expériences





Il y a 3 issues possibles à l'événement avoir deux fois Pile en 3 tirages sur 8 issues possibles au total.

$$p(A)=\frac{nombre\,d\,'issues\,de\,A}{nombre\,total\,d\,'issues}=\frac{3}{8}$$