Correction Plan de travail équations de droites :

Calcul du coefficient directeur d'une droite

Exercice 10:

On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

Déterminer, si possible, le coefficient directeur de la droite (AB) dans les cas suivants :

1. $A(3;-1)$; $B(5;2)$

Comme $x_A \neq x_B$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-(-1)}{5-3}=\frac{3}{2}$$

2. $A\left(\frac{-3}{4};-\frac{1}{3}\right)$ $B\left(\frac{5}{2};-\frac{2}{3}\right)$

Comme $x_A \neq x_B$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{-2}{3}-(\frac{-1}{3})}{\frac{5}{2}-(\frac{-3}{4})}=\frac{\frac{-1}{3}}{\frac{13}{4}}=\frac{-4}{39}$$

3. $A(-3;2)$ $B(-3;-1)$

Comme $x_A=x_B$, la droite est verticale, elle n'a pas de coefficient directeur.

Déterminer une équation d'une droite

Exercice 10:

On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

Déterminer l'équation de la droite (AB) dans les cas suivants :

1. $A(0;-1)$; $B(2;2)$

Comme $x_A \neq x_B$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-(-1)}{2}=\frac{3}{2}$$

donc $(AB): y=\frac{3}{2}x+p$ On cherche p

Comme $A\in(AB)$, $x=0$ et $y=-1$ vérifient l'équation :

$-1=\frac{3}{2}\times 0+p$ qui donne $p=-1$ et au final : $(AB): y=\frac{3}{2}x-1$

2. $A(-2;-3)$; $B(4;1)$

Comme $x_A \neq x_B$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-(-3)}{4-(-2)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

donc $(AB): y=\frac{2}{3}x+p$ On cherche p

Comme $A\in(AB)$, $x=-2$ et $y=-3$ vérifient l'équation :

$-3=\frac{2}{3}\times(-2)+p$ qui donne $p=-3+\frac{4}{3}=\frac{-5}{3}$ et au final : $(AB): y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

3. $A(2;-1)$ et $B(4;-1)$

Comme $y_A=y_B=-1$, la droite est horizontale et $(AB): y=-1$

4. $A(2;5)$ et $B(2;7)$

Comme $x_A=x_B=2$, la droite est verticale et $(AB): x=2$

Exercice 11:

On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan . Déterminer le réel p tel que le point $A(0;-1)$ appartienne à la droite (d) d'équation $y=3x+p$

On a $(d): y=3x+p$. On cherche p
Comme $A\in(d)$, $x=0$ *et* $y=-1$ vérifient l'équation :
$-1=3\times 0+p$ qui donne $p=-1$ et au final : $(d): y=3x-1$

Exercice 12:
On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan . Déterminer l'équation de la droite (d) passant par le point $A(3;-3)$ et de coefficient directeur -2.

On a le coefficient directeur de (d) qui vaut -2 donc $m=-2$ et $(d): y=-2x+p$.
On cherche p
Comme $A\in(d)$, $x=3$ *et* $y=-3$ vérifient l'équation :
$-3=-2\times 3+p$ qui donne $p=-3+6=3$ et au final : $(d): y=-2x+3$

Exercice 13:
On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan . Déterminer le réel m tel que le point $A(-1;2)$ appartienne à la droite (d) d'équation $y=mx-4$

On a $(d): y=mx-4$. On cherche m
Comme $A\in(d)$, $x=-1$ *et* $y=2$ vérifient l'équation :
$2=m\times(-1)-4$ qui donne $m=-6$ et au final : $(d): y=-6x-4$

Points alignés et droites parallèles

Exercice 14 :
On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan .
1. Les points $A(3;-1)$; $B(-1;-9)$ et $C(1;-5)$ sont-ils alignés ?
Pour savoir si les points A, B et C sont alignés, on cherche à savoir si les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
Comme $x_A\neq x_B$ et $x_A\neq x_C$, les deux droites ne sont pas verticales, on peut calculer leur coefficient directeur :
Pour (AB) : $m_1=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-9-(-1)}{-1-3}=\dfrac{-8}{-4}=2$
Pour (AC) : $m_2=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{-5-(-1)}{1-3}=\dfrac{-4}{-2}=2$
On observe que $m_1=m_2$
Par conséquent les droites (AB) et (AC) sont parallèles
Les points A,B et C sont donc alignés
2. Les points $D(5;-\dfrac{16}{7})$; $E(21;0)$ et $F\left(9;-\dfrac{13}{8}\right)$ sont-ils alignés ?
Pour savoir si les points D,E,F sont alignés, on cherche à savoir si les droites (DE) et (DF) sont parallèles.
Comme $x_D\neq x_E$ et $x_D\neq x_F$, les deux droites ne sont pas verticales, on peut calculer leur coefficient directeur :
Pour (DE) : $m_1=\dfrac{y_D-y_E}{x_D-x_E}=\dfrac{0-(\frac{-16}{7})}{21-5}=\dfrac{\frac{16}{7}}{16}=\dfrac{1}{7}$
Pour (DF) : $m_2=\dfrac{y_D-y_F}{x_D-x_F}=\dfrac{\frac{-13}{8}-(\frac{-16}{7})}{9-5}=\dfrac{\frac{-91+128}{56}}{4}=\dfrac{37}{224}\neq\dfrac{1}{7}$
On observe que $m_1\neq m_2$
Par conséquent les droites (AB) et (AC) sont pas parallèles
Les points A,B et C ne sont donc pas alignés

Exercice 15 :

On considère $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan . Dans les cas suivants, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. $A(5;-1)$; $B(-1;-2)$; $C(-5;2)$; $D(1;3)$

Pour savoir si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on calcule leur coefficient directeur respectif :

Comme $x_A \neq x_B$ et $x_D \neq x_C$, les deux droites ne sont pas verticales, on peut calculer leur coefficient directeur :

Pour (AB) : $m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-1)}{-1-5} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$

Pour (CD) : $m_2 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{2-3}{-5-1} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$

On observe que $m_1 = m_2$

Par conséquent les droites (AB) et (CD) sont parallèles

2. $A(3;-1)$; $B(3;7)$; $C(-5;-3)$; $D(-5;2)$

Comme $x_A = x_B$ et $x_C = x_D$, les deux droites sont verticales,

Par conséquent les droites (AB) et (CD) sont parallèles

3. $A(5;-3)$; $B(-1;-3)$; $C(-2;2)$; $D(4;2)$

Comme $y_A = y_B$ et $y_C = y_D$, les deux droites sont horizontales,

Par conséquent les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Intersection de deux droites

Exercice 16 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation : $(d_1): y=4x-1$ et $(d_2): y=-2x+3$

On cherche les couples de nombres $(x;y)$ qui vérifient à la fois

$(d_1): y=4x-1$ et $(d_2): y=-2x+3$

$M(x;y)=(d_1)\cap(d_2)$

Cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$\begin{cases} y=4x-1 \\ y=-2x+3 \end{cases}$ qui amène à l'équation $4x-1=-2x+3$

$$6x=4$$

$$x=\frac{2}{3}$$

si , $x=\frac{2}{3}$ alors en remplaçant dans l'équation de $(d_1): y=4x-1$

$y=4\times\frac{2}{3}-1=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$

On vérifie que le couple $(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ vérifie bien la deuxième équation du système :

$(d_2): y=-2\times\frac{2}{3}+3=-\frac{4}{3}+3=\frac{5}{3}$

Le système admet donc le couple $(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ comme solution.

Les deux droites sont donc sécantes en un point de coordonnées $(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$

Exercice 17 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équation (AB) et (CD) tels que :

$A(2;4)$; $B(3;-3)$; $C(-2;2)$; $D(4;3)$

On cherche une équation de la droite (AB) :
Comme $x_A \neq x_B$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :
$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-4}{3-2} = \frac{-7}{1} = -7$
donc $(AB): y = -7x + p$ On cherche p
Comme $A \in (AB)$, $x=2$ et $y=4$ vérifient l'équation :
$4 = -7 \times 2 + p$ qui donne $p = 18$ et au final : $(AB): y = -7x + 18$
On cherche une équation de la droite (CD) :
Comme $x_C \neq x_D$, la droite n'est pas verticale, on peut calculer son coefficient directeur :
$m_2 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-2}{4-(-2)} = \frac{1}{6}$
donc $(CD): y = \frac{1}{6}x + p$ On cherche p
Comme $C \in (AB)$, $x=-2$ et $y=2$ vérifient l'équation :
$2 = \frac{1}{6} \times -2 + p$ qui donne $p = 2 + \frac{2}{6} = \frac{7}{3}$ et au final : $(CD): y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{3}$

On cherche les couples de nombres $(x; y)$ qui vérifient à la fois
$(AB): y = -7x + 18$ et $(CD): y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{3}$

Cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues :
$\begin{cases} y = -7x + 18 \\ y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{3} \end{cases}$ qui amène à l'équation $-7x + 18 = \frac{1}{6}x + \frac{7}{3}$

$$-\frac{43}{6}x = \frac{7}{3} - 18 = \frac{-47}{3}$$
$$x = \frac{94}{43}$$

si , $x = \frac{94}{43}$ alors en remplaçant dans l'équation de $(AB): y = -7x + 18$
$$y = \frac{-7 \times 94}{43} + 18 = \frac{116}{43}$$

On vérifie que le couple $(\frac{94}{43}; \frac{116}{43})$ vérifie bien la deuxième équation du système :

$(CD): y = \frac{1}{6} \times \frac{94}{43} + \frac{7}{3} = \frac{116}{43}$

Le système admet donc le couple $(\frac{94}{43}; \frac{116}{43})$ comme solution.

Les deux droites sont donc sécantes en un point de coordonnées $(\frac{94}{43}; \frac{116}{43})$

Synthèse équations de droites

Exercice 18 :

On considère dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la droite d'équation : $(d_1): y = -3x - 4$ et la droite (d_2) passant par le point $P(3;-5)$ et coupant (d_1) sur l'axe des ordonnées. Déterminer une équation de la droite (d_2)

la droite (d_2) coupe (d_1) sur l'axe des ordonnées, donc elles ont toutes deux la même ordonnée à l'origine :
$p = -4$

d'où l'équation de la droite (d_2) est du type : $(d_2): y=mx-4$

or $P(3;-5)\in(d_2)$ d'où $-5=m\times3-4$ ce qui donne $-1=m\times3$ et finalement $m=-\frac{1}{3}$

on a donc : $(d_2): y=-\frac{1}{3}x-4$

Exercice 19 :

Dans un repère, on a les points A(-2 ;-2) , B(4 ;-2) et C(3;5)

1. Donner une équation de la droite (d), médiatrice de [AB].
2. a. Calculer les coordonnées de K milieu de [AC]
   b. Prouver que M(-3;4) est équidistant de A et C.
   c. En déduire une équation de la droite (d'), médiatrice de [AC]
3. Déterminer les coordonnées du point I, centre du cercle circonscrit au triangle.

1. $y_B=y_A$ donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.
   La médiatrice de [AB] est donc parallèle à l'axe des ordonnées. Elle passe par J milieu de [AB].
   $J(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$
   On obtient J(1;-2), l'équation de la médiatrice est donc : (d) : $x=1$
2. K milieu de [AC] , donc on sait que
   $K(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2})$ d'où $K(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$
3. On calcule les distances AM et MC pour les comparer.
   On sait que $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{37}$
   de même, en appliquant la même formule, on montre que $MC=\sqrt{37}$
   AM=MC donc M est équidistant de A et C
4. D'après la propriété vue en 6ème, comme M est équidistant de A et C, il appartient à la médiatrice de [AC], i.e. $M\in(d')$
   K est le milieu de [AC] donc $K\in(d')$
   On peut donc trouver l'équation de la droite (d') avec les coordonnées de deux de ses points, K et M :
   $x_K\neq x_M$ donc l'équation de (d') est de la forme $y=mx+p$

   $m=\frac{y_M-y_K}{x_M-x_K}=\frac{4-(\frac{3}{2})}{-3-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{-7}{2}}=-\frac{5}{7}$ on a alors (d') : $y=-\frac{5}{7}x+p$

   On cherche maintenant p :
   Comme $I\in(d')$, on remplace x par $\frac{1}{2}$ et y par $\frac{3}{2}$ dans l'équation
   $y=-\frac{5}{7}x+p$ ce qui donne $\frac{3}{2}=-\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}+p$ d'où $p=\frac{3}{2}+\frac{5}{14}=\frac{26}{14}=\frac{13}{7}$
   et finalement (d') : $y=-\frac{5}{7}x+\frac{13}{7}$

5. Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point de concourance des médiatrices d'un triangle.
   I est donc le point d'intersection de (d) et (d')
   On note $I=(d)\cap(d')$
   Le point $I(x;y)$ donc doit vérifier le système $\begin{cases} y=-\frac{5}{7}x+\frac{13}{7} \\ x=1 \end{cases}$
   il vient facilement $\begin{cases} y=\frac{8}{7} \\ x=1 \end{cases}$ et $I(\frac{8}{7};1)$